Шлепкин А.А.
shlyopkin@mail.ru
Сибирский федеральный университет

Оптимизация параметров работы торгового предприятия, как системы массового обслуживания

Поскольку каждый человек является потенциальным покупателем, то оптимизация работы торгового предприятия представляет практический интерес. Организация и управление работой торгового предприятия является многопрофильной задачей [1-5]. Одним из ее аспектов служит рациональное использование людских ресурсов, повышение эффективности их работы и создание комфортной среды для покупателей. При этом, чтобы риски (потери) для предприятия были минимальны [1-5].

Любое торговое предприятия может рассматриваться как система массового обслуживания. Результатом моделирования является отчет и рекомендации администрации торговой сети, позволяющей, с одной стороны, увеличить эффективность работы предприятия, с другой стороны, уменьшить время проводимое клиентом в торговой сети.

Моделирование системы массового обслуживания для торговых сетей имеет следующие особенности параметров, характеризующих работу всей системы: число поступающих заявок и время обслуживания клиента являются случайными. Поэтому необходимо использование вероятностных методов. Большое количество работ посвящено решению этих вопросов.

1 Описание модели системы

В настоящее время практически во всех торговых предприятиях, особенно продуктовых супермаркетах, обслуживающих устройств (расчетных касс) бывает несколько. Покупатели, выбрав нужный для них товар подходят к кассе, и, либо обслуживаются сразу, если есть свободная касса, либо становятся в очередь, если все кассы заняты. Поэтому при рассмотрении работы такой торговой сети можно использовать многоканальные системы массового обслуживания. Если входящий поток требований является стационарным, ординарным и без последействия, то указанные выше системы массового обслуживания очень хорошо изучены [6-10].

Пусть k — число обслуживающих устройств (каналов обслуживания) системы массового обслуживания. Сформулируем сначала ряд определений.

Определение 1. Интенсивностью входящего потока требований называется среднее число требований, поступающих за единицу времени. Пусть $\lambda(t)$ — интенсивность входящего потока.

Определение 2. Интенсивностью работы обслуживающего устройства называется среднее число обслуженных требований за единицу времени одним каналом обслуживания.

Пусть μ — интенсивность работы обслуживающего устройства. Для стационарных систем это также постоянная величина.

Определение 3. Приведенной интенсивностью стационарной системы массового обслуживания называется величина

$$\upsilon = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{1}$$

Итак, работу торгового предприятия описываем, используя модель многоканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью.

Состояние системы массового обслуживания и ее работа описывается с помощью вероятностей $P_n(t)$

Определение 4. $P_n(t)$ – вероятность того, что в системе массового обслуживания с k каналами обслуживания находится n требований в момент времени t. Очевидно, что $n \geqslant 0$.

Для вероятностей $P_n(t)$ составлена система бесконечного числа дифференциальных уравнений [7,9].

Для стационарных моделей вероятности $P_n(t)$ не зависят от времени t, то есть они постоянны. В стационарном случае $\lambda(t) = \lambda = const$ и значение вероятности $P_n(t)$ являются постоянными их значения известны, [7-9].

Решение системы алгебраических уравнений имеет вид:

1. Если $0 \leq n \leq k$, то

$$P_n = \frac{\upsilon^n}{n!} P_0 \tag{2}$$

2. Если $n \geq k$, то

$$P_n = \frac{\upsilon^n}{k! k^{n-k}} P_0, \tag{3}$$

где

$$P_0 = \Big(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\upsilon^n}{n!} + \frac{\upsilon^k}{k!(1 - \frac{\upsilon}{k})} \Big)^{-1} \tag{4}$$

Если $\lambda > \mu k$, то очередь требований начинает неограниченно расти, что приводит к коллапсу системы массового обслуживания [9]. Поэтому для нормального функционирования системы массового обслуживания необходимо, чтобы выполнялось условие $\lambda < \mu k$. Выполнение этого условия достигается путем увеличения числа каналов обслуживания.

2 Эффективность работы системы массового обслуживания

С помощью вероятностей P_n задаются характеристики эффективности работы системы массового обслуживания [9].

1. среднее число клиентов в очереди равно

$$N = \frac{k\upsilon}{(k - \upsilon)^2} P_k \tag{5}$$

2. средняя продолжительность пребывания в очереди

$$T = \frac{N}{\lambda}. \tag{6}$$

3. средняя продолжительность пребывания клиента в системе

$$U = T + \frac{1}{\mu}. \tag{7}$$

4. Среднее число свободных каналов обслуживания

$$M = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{k-n}{n!} \alpha^k P_0. \tag{8}$$

5. Коэффициент простоя каналов обслуживания

$$H = \frac{M}{k}. \tag{9}$$

6. Среднее число занятых каналов обслуживания:

$$D = k - M. \tag{10}$$

7. Коэффициент загрузки каналов обслуживания:

$$F = \frac{D}{k}. \tag{11}$$

Очевидно, что для потенциального покупателя важной характеристикой является время пребывания в системе, чем оно меньше, тем качественнее обслуживание.

Условие стационарности входящего потока требований в действительности чаще всего не выполняется. Поэтому предполагать, что интенсивность входящего потока требований постоянна на протяжении всего времени работы системы массового обслуживания, это значит, что созданная модель не будет являться адекватной. Прогнозирование с использованием такой модели, скорее всего, приведет к расхождению с реальным результатом. Вследствие чего, ценность данной модели при проектировании систем массового обслуживания в торговых сетях, ставиться под вопрос.

Таким образом, в нестационарных моделях систем массового обслуживания интенсивность входящего потока требований будет рассматриваться как некоторая функция времени $\lambda(t)$.

Вероятностными характеристиками состояния и работы нестационарной системы массового обслуживания по-прежнему остаются вероятности $P_n(t)$, то есть вероятности таких событий, что в момент времени t в системе находится n требований.

На данный момент окончательного решения задачи нахождения вероятностей $P_n(t)$ в аналитическом виде не существует. Тому есть ряд причин.

1. При составлении системы дифференциальных уравнений для вероятностей $P_n(t)$ нигде не использовалось условие стационарности. Поэтому система уравнений остается прежней. Но эта система уравнений престает быть

системой с постоянными коэффициентами. Коэффициенты системы являются функциями времени t. Несмотря на свою простоту (система является линейной, первого порядка), эта система уравнений аналитически не решается в общем виде. Этот факт известен из теории дифференциальных уравнений [11, 12].

2. Следующее непреодолимое препятствие заключается в том, что в силу нестационарности вероятности $P_n(t)$ не могут быть постоянными. Следовательно, их производные не равны нулю. По этой причине исходная система дифференциальных уравнений не может быть сведена к алгебраической системе уравнений

В результате изложенные выше методы являются неприменимыми при моделировании системы массового обслуживания торговой сети, как нестационарной системы.

Предлагаются различные методы для решения указанной проблемы нахождения вероятностей $P_n(t)$.

В настоящие время основным направлением, в котором ведутся исследования, является поиск численных методов для решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающей работу нестационарной системы массового обслуживания.

В данной работе будет предложен другой подход, применимый к моделированию торговой сети как нестационарной системы массового обслуживания.

3 Нестационарная система массового обслуживания как кусочно-стационарная

Если условие стационарности не выпонено, то мы полагаем, что можно рассмотреть следующий подход к решению проблемы.

Можно предположить, что в определенные промежутки времени система массового обслуживания является стационарной, но с различными параметрами. Условно такой режим работы можно назвать кусочно-стационарным. То есть все время работы T разбить на непересекающиеся отрезки времени

$$T = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup ... \cup [t_{l-1}, t_l] \tag{12}$$

Очевидно, что количество интервалов l не должно быть слишком большим. Для торговой сети это может быть 2,3,4,5 интервалов. На протяжении каждого интервала времени система работает стационарно, то есть интенсивность потока требований является постоянной, но для различных интервалов времени она различна. То есть приближенно считать, что

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t \in [t_0, t_1]; \\ \lambda_2, & t \in [t_1, t_2]; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \lambda_l = & t \in [t_{l-1}, t_l]. \end{cases}$$

В данном случае интенсивность входящего потока требований приближаем кусочно-непрерывной функцией. Тогда для расчета вероятностей $P_n(t)$ можно использовать формулы таким образом, что если $t \in [t_{j-1}, t_j]$, то $\lambda(t) = \lambda_j$. Поэтому вероятность $P_n(t)$ также приближается кусочно-непрерывными функциями.

Такая модель системы массового обслуживания (мы ее называем кусочно-стационарной) может довольно хорошо описывать работу торговой сети, поскольку количество покупателей в определенные промежутки времени является довольно стабильной величиной. Например, если рассмотреть работу продуктового супермаркета, то известно, что в утренние и послеобеденные часы супермаркет принимает меньшее количество покупателей, чем в обеденные и вечерние.

4 Конкретизация модели нестационарной системы массового обслуживания

Предлагаемый следующий подход, который сложнее чем предыидущий, заключается в том, что предлагаемая модель должна привязываться к конкретной системе массового обслуживания и должна быть как можно более детально проработана под данную систему. Детальность заключается в выборе количества каналов обслуживания, конкретном виде интенсивности входящего потока требований и некоторых других особенностей системы. Естественно, что такие модели будут специфическими, и смогут применяться для узкого круга систем массового обслуживания.

Пусть интенсивность входящего потока требований равна $\lambda(t)$. Известно, что тогда вероятность поступления r требований в интервале времени $(t, t+\tau)$ равна

$$p_r(t,\tau) = e^{-\Lambda(t,\tau)}\frac{\Lambda^r(t,\tau)}{r!}, \tag{13}$$

где

$$\Lambda(t,\tau) = \int_0^\tau \lambda(t+u)du. \tag{14}$$

Разобьем все рабочее время T торговой сети на s равных интервалов

$$T = \bigcup_{i=1}^{s}(\tau(i-1), \tau i), \tag{15}$$

где $\tau s = T$. Обозначим интервал $(\tau(i-1), \tau i) = \alpha_i$. Рассмотрим вероятности

$$p_r(\tau(i-1), \tau i) = p_{r(i)}(\alpha_i), \tag{16}$$

где $r(i)$ — число требований, поступивших в систему во временной интервал α_i, очевидно, что $0 \leq r_i < \infty$. Среднее число обслуженных требований одним каналом за время α_i равна $\mu\tau$. Если ситема имеет k каналов обслуживания, то в каждый интервал времени α_0 будет обслужено $\mu\tau k$ требований.

Итак, рассмотрим временной интервал α_i. Для $t \in \alpha_i$ можно вычислить все вероятности $p_{r(i)}(\alpha_i)$ при различных значениях $r(i)$. Очевидно, что среди всех $r(i)$ интерес представляет то количество требований $R(i)$, которое соответствует максимальной вероятности $p_{r(i)}(\alpha_i)$. То есть выбираем $R(i)$ так, что

$$p_{R(i)}(\alpha_i) = max(p_{r(i)}(\alpha_i)), \tag{17}$$

где

$$0 \leq r(i) < \infty. \tag{18}$$

Мы предлагаем такой выбор $R(i)$, основываясь на том, что событие, имеющие наибольшую вероятность, имеет большее количество шансов произойти, чем событие с меньшей вероятностью.

Такой подход довольно часто используется в построении различных моделей. Например, в теории оценок параметров распределений — метод максимального правдоподобия, а в теории проверки статистических гипотез — выбор критической области.

Далее, чтобы выбрать количество каналов обслуживания, будем руководствоваться тем соображением, чтобы очередь не росла неограниченно. То есть, чтобы в случае торгового предприятия, окупаетль чувствовол себя комфортно, и в тоже время, количество обслуживающих устройств, (расчетных касс) не было слишком большим. Значит, должно выполняться условие:

$$R(i) - \mu\tau k(i) \leq 0, \tag{19}$$

где $k(i)$ — число каналов обслуживания во временной промежуток α_i. Поэтому

$$k(i) \geq \frac{R(i)}{\mu\tau}. \tag{20}$$

Так как число каналов обслуживания — целое число, то возьмем

$$k(i) = \left[\frac{R(i)}{\mu\tau}\right] + 1. \tag{21}$$

Где

$$\left[\frac{R(i)}{\mu\tau}\right] \tag{22}$$

— целая часть числа $\frac{R(i)}{\mu\tau}$.

Рассмотрим все временные отрезки α_i, можно давать рекомендации какое количество каналов обслуживания предпочтительнее с вероятностной точки зрения. Естественно, что случайное число требований $r(i)$ может быть как меньше, так и больше чем $R(i)$, но в силу закона больших чисел это отличие не должно быть существенным.

5 Алгоритм вычисления числа каналов обслуживания

Рассмотрим вероятности

$$p_r(t,\tau) = e^{-\Lambda(t,\tau)\frac{\Lambda(t,\tau)}{r!}} \tag{23}$$

так как максимальное значение $p_r(t,\tau)$ как функция аргумента принимает при $r = \Lambda(t,\tau)$ то выбираем

$$R(i) = [\Lambda(t,\tau), r] + 1, \tag{24}$$

где $[\Lambda(\tau(i-1),\tau)]$ целая часть числа $\Lambda(\tau(i-1),\tau i)$ Учитывая сказанное выше, алгоритм вычисления числа каналов обслуживания имеет следующий вид:

1. Задаем: функцию $\lambda(t)$, параметры μ,τ,s,T.
2. Вычисляем

$$\tau=\frac{T}{s}. \tag{25}$$

3. Вычисляем для $i\le i\le s$.

$$\Lambda(i)=\lambda(\tau(i-1),\tau)=\int_{\tau(i-1)}^{\tau}\lambda(r(i-1)+u)du. \tag{26}$$

4. Вычисляем

$$R(i)=[\Lambda(i)]+1. \tag{27}$$

5. Вычисляем

$$K(i)=\left[\frac{R(i)}{\mu\tau}\right]+1. \tag{28}$$

6. Вывод $K(i),\ 1\le i\le s$.

*Примечание. Работа выполнена при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, проект №2306ГУ1/2014.

Список использованных источников

[1] Л.А. Калинина, Е.В. Хартитонова, Г.В. Михайлова, А.Н. Саломатин. *Экономика и организация деятельности торгового предприятия.* Москва, ИНФРО - М, 2000 г., 295 с.

[2] П.В. Колпиков. *Моделирование финансовой политики торгового предприятия в современных условиях.* Кандидатская диссертация, Москва, 2001 г., 242 с.

[3] Т.П. Данько. *Организация и управление торговым предприятие.* Москва ИНФРО-М, 2009 г., 257 с.

[4] Б.С. Добронец, О.А. Попова. *Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности.* Вестник Томского государственного университета, Выпуск № 4(21), 2012 г., С. 39-46.

[5] Н.С. Бородина, А.О. Негря, Н.В. Ширяева. *Финансовое планирование текущей деятельности торгового предприяиия.* XV студенческая международная научо-практическая конференция "Научное сообщество студентов XXI столетия,"Новосибирск, 2013 г., С. 42-47.

[6] А.А. Боровков. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.* Москва, Наука, 1972 г. 368 с.

[7] Е.С. Вентцель. *Теория вероятностей.* Москва, Высшая школа, 1999 г. 576 с.

[8] Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. *Теория вероятностей.* Москва, Высшая школа, 1969 г., 368 с.

[9] В.А. Каштанов. *Теория массового обслуживания.* Москва, ЮНИТИ, 2008 г., 340 с.

[10] В.П. Скитович. *Элементы теории массвого обслуживания.* Издательство Ленинградского университета, Ленинград, 1976 г., 96 с.

[11] И.Г.Петровский. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва, Наука, 1970 г., 96 с.

[12] Л.С. Понтрягин. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Москва, Наука, 1970 г., 332 с.