УДК 51.74+519.1 Малакичев А.О.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ПЕРКОЛЯЦИЯ ПЛОСКИХ СТРУКТУР

Решение ряда задач математики, техники, физики, экономики и других наук, не всегда требует получения абсолютно точного ответа на поставленную проблему. Вполне достаточным считается получение некоторой аппроксимации решения, с заданной степенью точности.

Метод конечных элементов (МКЭ) – один из основных методов в современных технических областях науки. Круг задач, решаемых с помощью МКЭ очень широк и затрагивает такие области как строительство и машиностроение, гидро- и аэродинамика, горное дело и новейшая техника, а также различные задачи математической физики – теплопроводности, фильтрации, распространения волн и т. д.

Суть метода заключается в том, что область, занимаемая конструкцией, разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам подобластей. Последние носят название конечных элементов (КЭ), а сам процесс разбивки – дискретизацией.

С уменьшением максимального размера элементов увеличивается число узлов и неизвестных узловых параметров. Вместе с этим повышается возможность более точно удовлетворить уравнениям задачи и тем самым приблизиться к искомому решению. В настоящее время уже изучены многие вопросы, касающиеся сходимости приближенного решения методом конечных элементов к точному. Для линейных задач, когда неизвестные функции и операции над ними входят во все соотношения задачи только в первой степени, метод конечных элементов получил достаточно полное математическое обоснование.

Согласно основной идее МКЭ, разбивая рассматриваемую область на более мелкие элементы и отождествляя их с некоторыми числами, мы получаем для обработки массив числовой информации. Далее полученные данные обрабатываются с использованием аппарата численных методов, который способен найти приближенное решение задач математического анализа, дифференциально-интегрального исчисления, матричного анализа и других непрерывных разделов математики.

Аналогичные подходы присутствуют и в других разделах математики. Например, при анализе некоторых статистических характеристик удобно представлять предложенные интервалы в виде чисел. Такой подход позволяет сократить объем вычислительной работы и получить изучаемых оценки величин с заданной наперед точностью.

Стоит также отметить, что некоторые аналоги МКЭ есть и в комбинаторном анализе (см., например, [6]), где свойства некоторых конфигураций изучаются с помощью узловых точек, обладающих свойствами характерными для рассматриваемого объекта. Именно такой подход и рассматривается в работе в дальнейшем.

Массивам числовой информации, получаемой при использовании МКЭ, можно придавать различную структуру. Не исключается и использование так называемых арифметических треугольников, одним из которых является треугольник Паскаля.

Внушительный объем работ ряда авторов посвящен изучению различных сечений (см., например, [7]), сумм элементов треугольника, а также обобщений треугольника Паскаля. Обзор таких работ представлен, например, в [1; 4].

Пусть некоторая область G первой координатной четверти ограничена прямыми $x = x_0$, $y = y_0$ и кривой $f(x,y) = 0$. Для случая, когда $f(x,y) = 0$ задает на плоскости кривую второго порядка, рассмотрим вопрос о виде биномиальных коэффициентов треугольника Паскаля, принадлежащих границе области G, и найдем суммы коэффициентов принадлежащих области. Для этого будем рассматривать треугольник Паскаля как целочисленную решетку первой координатной четверти (см., например, [8]).

Рассмотрим последовательность биномиальных коэффициентов, лежащих на окружности $x^2 + y^2 = r^2$, где $r \in N$. Выражение для биномиальных коэффициентов, лежащих на данной окружности, имеет вид:

$$\binom{x+\sqrt{r^2-y^2}}{x} = \prod_{i=1}^{x} \frac{\sqrt{r^2-x^2}+i}{i}. \quad (1)$$

Утверждение 1. Сумма элементов, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 \le r^2$ находится по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{[r]} \sum_{x=0}^{\left[\sqrt{r^2-i^2}\right]} \binom{x+i}{x}. \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность биномиальных коэффициентов, лежащих на эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ Соотношение для биномиальных коэффициентов, лежащих на заданном эллипсе, имеет вид:

$$\binom{x+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \prod_{i=1}^{x} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}+i}{i}. \quad (3)$$

Утверждение 2. Сумма элементов, удовлетворяющих условию $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ находится по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{[b]} \sum_{x=0}^{\left[\frac{a}{b}\sqrt{r^2-i^2}\right]} \binom{x+i}{x}. \quad (4)$$

Рассмотрим биномиальные коэффициенты, принадлежащие параболе $y = ax^2$, получим последовательность чисел:

$$\binom{x+ax^2}{x} = \prod_{i=1}^{x} \frac{ax^2+i}{i}. \quad (5)$$

Утверждение 3. Сумма элементов, лежащих в области $y \geq ax^2$ и $y = y_0$, находится по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{y_0} \sum_{x=0}^{\left[\sqrt{\frac{i}{a}}\right]} \binom{x+i}{x}. \quad (6)$$

Рассмотрим последовательность биномиальных коэффициентов, лежащих на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ Выражение для биномиальных коэффициентов, лежащих на заданной гиперболе, имеет вид:

$$\binom{x + \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \prod_{i=1}^{x} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} + i}{i}. \quad (7)$$

Утверждение 4. Сумма элементов, лежащих внутри области $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$ $x = x_0$ и $y = y_0$ находится по формуле:

$$S = \sum_{i=0}^{y_0} \sum_{x=0}^{\left[\frac{a}{b}\sqrt{r^2 - i^2}\right]} \binom{x+i}{x}. \quad (8)$$

Предложенный подход к изучению свойств некоторых плоских областей может расширить область применения треугольника Паскаля, и, возможно, позволит получить новые свойства и соотношения в треугольнике.

БИБИЛИОГРАФИЧЕСИКЙ СПИСОК

1. Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы, приложения / Б. А. Бондаренко. – Ташкент: Фан, 1990. – 192 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.
4. Кузьмин О. В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 2000. – 294 с.
5. Кузьмин О. В. Плоские сечения обобщенной пирамиды Паскаля и их интерпретации / О. В. Кузьмин, М. В. Серегина // Дискретная математика. 2010. Т. 22. № 3. С. 83-93.
6. Кузьмин О.В. «Трехточечная» модель турбулентной атмосферы // Совр. Проблемы механики жидкости и газа: Тез. докл. V Всесоюз. Шк.-семинара. – Иркутск, 1990. – С. 200.
7. Малакичев А. О. Сечение треугольника Паскаля семейством степенных функций / А. О. Малакичев // Сборник научных трудов SWorld. 2014. Вып. 1. Т. 29. С. 91-94.
8. Green T. M. Reccurent sequences and Paskal's triangle / T. M. Green // Math. Mag. 1968. – Vol. 41 N. 1. – P. 13-21.