Применение матриц комбинаторных полиномов разбиений в многоэтапных моделях обогащения полезных ископаемых

Соискатель Кузьмина В.В.

Руководитель д. ф-м. наук, профессор Кузьмин О.В.

Обогащение полезных ископаемых – это совокупность методов и процессов первичной переработки минерального сырья с целью концентрации ценных компонентов в кондиционных продуктах путем удаления пустой породы и разделения минералов. В результате обогащения природного минерального сырья получают один или несколько концентратов и отходы (хвосты). Концентратом называется продукт обогащения, имеющий более высокое по сравнению с рудой содержание полезного компонента. Т. е. цель обогащения – повысить концентрацию ценного компонента в конечном продукте.

Концентрация – суть случайная величина. Ее оценка производится при пробном извлечении породы, а также при выработке технологии процесса обогащения. Отслеживание показателей концентрации осуществляется на постоянной основе с целью контроля над технологическим процессом. В обязательном порядке идет замер первичной концентрации – т.е. определяется содержание полезного продукта в исходном сырье. Именно от этого показателя зависит выбор технологии обогащения. Т.е. на горно-обогатительную фабрику поступает «однородное» сырье, содержание в котором полезного вещества примерно одно и то же. В нашей модели примем эту величину как постоянную (1-е допущение).

На практике, процесс обогащения имеет несколько этапов, как, например, на представленной схеме обогащения железных руд.

На каждом этапе обогащения концентрация повышается в пределах допустимого промежутка. Например, после 3-го этапа содержание полезного вещества должно быть в пределах от 50 до 60%%. Однако в рамках установленного промежутка концентрация может варьироваться и является случайной величиной.

В процессе обогащения, на промежуточных и завершающем этапах осуществляется контроль качества продукта, путем извлечения и исследования проб. Таким образом, набирается статистика, которая позволяет построить эмпирическое распределение роста концентрации полезного вещества.

Ясно, что если данные концентраций, полученные при извлечении проб будут отличаться от нормативных показателей, это может говорить:

- о нарушении технологического процесса и необходимости его корректировки на определенном этапе;

- о качественном изменении исходного сырья;

- о недобросовестных действиях работников предприятия.

Однако в случае, если на каком-то этапе невозможно осуществить отбор и исследование проб применение матриц комбинаторных полиномов разбиений (однородных полиномов Белла и Платонова) позволяет найти вероятностную оценку концентрации аналитически.

Формальные переменные, участвующие в построении однородных полиномов Белла (А-полиномов) и Платонова (В-полиномов), могут считаться совпадающими с последовательными производными некоторой функции.

Тогда для любой сложной функции вида: $F(t) = f_1(f_2[\ldots f_n(t)])$ (имеет место композиция n функций) справедливо матричное соотношение:

$$A_{f_n} A_{f_{n-1}} \cdot \ldots \cdot A_{f_1} = A_F . \qquad (1)$$

где A_{f_i} – матрицы А-полиномов. В качестве элементов первых столбцов данных матриц выступают n-е производные функций f_i (т.е. внутренних функций).

В случае если функции, участвующие в построении однородных полиномов Белла, являются производящими функциями некоторых дискретных распределений, можно дать вероятностную интерпретацию полученной формулы. Так, в частности, первый столбец матрицы однородных полиномов Белла (А-полиномов) с точностью до нормирующего коэффициента содержит информацию о дискретном вероятностном распределении. Заметим, что аналогичными свойствами обладает и матрица полиномов Платонова.

Т.е. в рамках нашей модели каждая матрица A_{f_i} будет содержать в себе вероятностную оценку концентрации на определенном этапе обогащения. А матрица A_F будет содержать информацию по всему циклу обогащения.

Допущения модели:

1) Первичная концентрация вещества в сырье должна быть постоянной величиной

2) Фактически, концентрация есть непрерывная случайная величина, а обсуждаемая модель «работает» только с дискретными величинами. Поэтому на этапе составления эмпирических функций распределения необходимо произвести ранжирование полученных данных.
3) Условие монотонного неубывания потока. Данное необходимое условие будет выполняться в рамках формируемой модели, поскольку на каждом последующем этапе обогащения концентрация повышается (или, в крайнем случае, остается на прежнем уровне).
4) Размерность матриц A_{f_i} определяется в каждой задаче и индивидуально и должна совпадать с размерностью матрицы A_F. Все матрицы – нижние треугольные.

Основные этапы модели

1 этап

Набор статистики, ранжирование данных, формирование дискретных вероятностных распределений

2 этап

Формирование матриц А-полиномов

3 этап

Решение матричного уравнения, нахождение матрицы А-полиномов для этапа, по которому нет статистики

4 этап

Вероятностная оценка полученной матрицы

5 этап

В случае необходимости, корректировка технологического процесса, административные решения

1 этап

Набор статистики, ранжирование данных, формирование дискретных вероятностных распределений

2 этап

Формирование матриц А-полиномов

С дискретными вероятностными распределениями связана (обычная) производящая функция $p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n$, где p_n - вероятность некого события, $\sum_n p_n = 1$. Однако, для построения матрицы А-полинома удобнее пользоваться экспоненциальной производящей функцией $\tilde{p}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n \frac{t^n}{n!}$.

Шаг 1

Осуществим переход от одной функции к другой:

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n = 1!\, p_1 \frac{t^1}{1!} + 2!\, p_2 \frac{t^2}{2!} + 3!\, p_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots + n!\, p_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n!\, p_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n \frac{t^n}{n!} = \tilde{p}(t)$$

,

где $\tilde{p}_n = n!\, p_n$.

Шаг

Формируем матрицу $\overline{A}_{\tilde{p}}$.

Элементы 1-го столбца представляют собой n-е производные 1-кратной свертки ряда $\tilde{p}(t)$ при $t = 0$.

Элементы 2-го столбца представляют собой n-е производные 2-кратной свертки ряда $\tilde{p}(t)$ при $t = 0$ и т. д.

Тогда n-й элемент k-го столбца матрицы $\overline{A}_{\tilde{p}}$ равен n-й производной k-кратной свертки ряда $\tilde{p}(t)$ при $t = 0$.

В общем виде имеем: $\overline{A}_{n,k}(\tilde{p}) = k!\, A_{n,k}(\tilde{p})$.

Шаг 3

Переходим от матрицы $\overline{A}_{\tilde{p}}$ к матрице $A_{\tilde{p}}$.

Пусть D - бесконечная диагональная матрица с элементами $d_n = n!,\ n \geq 1$, а D^{-1} – матрица, двусторонняя обратная D.

Тогда $\overline{A}_{\tilde{p}} D^{-1} = A_{\tilde{p}}$ или поэлементно - $\overline{A}_{n,k}(\tilde{p}) \cdot k!^{-1} = A_{n,k}(\tilde{p})$.

Таким образом, мы построили матрицу однородных полиномов Белла от формальных переменных $\tilde{p}_n$.

По этому алгоритму строятся матрицы однородных полиномов Белла для каждого этапа обогащения (по которым у нас есть информация), а также для всего цикла переработки

3 этап

Затем составляем матричное равенство, в котором неизвестной остается какая-то матрица: $A_{\tilde{f}_n} A_{\tilde{f}_{n-1}} \cdot \ldots \cdot A_{\tilde{f}_1} = A_{\tilde{F}}$. (2)

Допустим, какой-то процесс обогащения содержит 3 этапа обогащения. Тогда формула (2) принимает вид:

$$A_{\tilde{h}} A_{\tilde{g}} A_{\tilde{f}} = A_{\tilde{F}}.$$

И пусть остается неизвестной матрица $A_{\tilde{g}}$, т.е. нам неизвестна вероятностная оценка концентрации на 2-м этапе обогащения. Решая данное матричное уравнение, или (в терминологии Платонова) осуществляя ротацию, мы приходим к следующему решению:

$B_{\tilde{h}} A_{\tilde{F}} B_{\tilde{f}} = A_{\tilde{g}}$, где $B_{\tilde{h}}$ $B_{\tilde{f}}$, - матрицы однородных полиномов Платонова (В-полиномов).

Матрица В-полиномов находится из равенства $A_{\tilde{h}} B_{\tilde{h}} = E$, где Е – единичная матрица.

Аналогично, при необходимости находятся матрицы $A_{\tilde{h}}$, $A_{\tilde{f}}$:

$$B_{\tilde{g}} B_{\tilde{h}} A_{\tilde{F}} = A_{\tilde{f}},$$

$$A_{\tilde{F}} B_{\tilde{f}} B_{\tilde{g}} = A_{\tilde{h}}$$

Заметим, что для тройной сложной функции имеем 12 фаз ротации. А для композиции n функций получаем $n(n+1)$ фаз ($n+1$ – основные, $(n+1)(n-1)$ – вспомогательные).

4 этап

На завершающем этапе работы модели необходимо дать вероятностную интерпретацию элементов найденной матрицы $A_{\tilde{g}}$.

Напомню, что ранее были построены матрицы от формальных переменных вида $\tilde{p}_n = n!\, p_n$. Полученная матрица $A_{\tilde{g}}$ – тоже от формальных переменных $\tilde{g}$. Необходимо вернуться к искомым вероятностям. Для этого осуществим нормировку матрицы.

Пусть D - бесконечная диагональная матрица с элементами $d_n = n!,\ n \geq 1$, а D^{-1} – матрица, двусторонняя обратная D.

Тогда $A'_g = D^{-1} A_{\tilde{g}} D$ или поэлементно - $A'_{n,k}(g) = A_{n,k}(\tilde{g}) \cdot k! \cdot n!^{-1}$.

Таким образом матрица A'_g содержит полную информацию о свертках любых натуральных порядков дискретного вероятностного распределения $g(t)$. Так, в частности, первый столбец содержит информацию о распределении $g(t)$.

5 этап

В случае необходимости, происходит корректировка технологического процесса либо принимаются административные решения.