АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Осипенко Л.А., доцент кафедры ТВиДМ ИМЭИ ИГУ

Первая глава учебного пособия. Предназначена для студентов первого курса специальности «Математика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Оглавление

ГЛАВА 1. Векторная алгебра

1. Основные понятия векторной алгебры

Определение 1.1. Пусть даны две точки на плоскости A и B. **Вектором** называется направленный отрезок, идущий из точки A в точку B. Точка A называется **началом** вектора, точка B – **концом**.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$.

Определение 1.2. Расстояние между началом и концом вектора называется его **длиной** или **модулем** и обозначается как $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = AB$

Нулевой вектор – вектор у которого начало и конец совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю.

Определение 1.3. Вектор, модуль которого равен единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

Определение 1.4. Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются **компланарными**, если они лежат в одной (или в параллельных) плоскостях.

В зависимости от того, как определяется понятие равенства векторов, различают свободные, скользящие и фиксированные векторы. В геометрии, как правило, рассматриваются свободные векторы, для которых равенство определяется следующим образом:

Определение 1.5. Два вектора называют **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины совпадают: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Свободный вектор $\overrightarrow{AB}$ можно определить как параллельный перенос плоскости или пространства, при котором точка A переходит в точку B.

При рассмотрении скользящих векторов, равными считаются сонаправленные векторы, имеющие одинаковую длину, при условии, что эти векторы лежат на одной прямой (но не на параллельных прямых!). Такие векторы часто рассматриваются в механике.

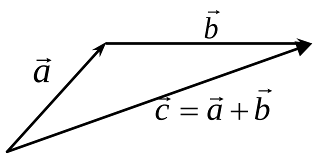
Два фиксированных вектора называются равными, если у них совпадают начало и конец.

В дальнейшем рассматриваются только свободные векторы.

2. Линейные операции над векторами

Сложение векторов.

Определение 2.1. Если начло вектора $\vec{b}$ приложить к концу вектору $\vec{a}$, то вектор, идущий от начала вектора $\vec{a}$ к концу вектора $\vec{b}$ называется суммой этих векторов $\vec{a} + \vec{b}$



Для нахождения суммы двух векторов можно использовать также **«правило параллелограмма»:** если приложить два вектора к одной точке и достроить до параллелограмма, то сумма векторов будет равна диагонали параллелограмма, идущей из точки приложения векторов.

Свойства операции сложения векторов:

1) коммутативность $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2) ассоциативность: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

3) для любого вектора $\vec{a}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $-\vec{a}$, такой, что

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Вектор $-\vec{a}$ называют **противоположным** вектору $\vec{a}$.

Вычитание векторов.

Определение 2.2. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условию

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}.$$

Отметим, что вычитание можно заменить сложением с противоположным вектором.

Вектор $\vec{c}$, являющийся результатом **вычитания** двух векторов, строится также по правилу параллелограмма, но является в нем второй диагональю.

Умножение вектора на число (скаляр).

Определение 2.3. Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

2) $\lambda\vec{a}$ имеет длину $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$;

3) $\lambda\vec{a}$ сонаправлен $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ и направлен в противоположную сторону при $\lambda < 0$.

Свойства операции умножения вектора на скаляр:

1) ассоциативность относительно умножения скаляров: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

2) дистрибутивность относительно сложения скаляров чисел: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

3) дистрибутивность относительно сложения векторов: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

4) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

3. Векторное пространство

Пусть V - некоторое множество, элементы которого $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ . . . будем называть векторами независимо от природы последних. Наряду с этим множеством рассмотрим поле над множеством действительных чисел R, элементами которого являются действительные числа α, β, λ, μ, ...

Зададим на V операцию, ставящую в соответствие любым двум векторам $\vec{a},\vec{b} \in$ V элемент этого же множества: $\vec{c} \in$ V , обозначая эту операцию символом “+” ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$) и называя ее операцией сложения

Предположим, что эта операция обладает следующими свойствами:

Аксиомы сложения векторов: $\vec{a}+\vec{b}$

1. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$; $\forall\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in \mathrm{V}$,

2. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $\forall\,\vec{a},\vec{b}\in \mathrm{V}$,

3. $\exists\,\vec{0}\in \mathrm{V}\,|\,\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$; $\forall\,\vec{a}\in \mathrm{V}$,

4. $\exists -\vec{a}\in \mathrm{V}\,|\,\vec{a}+(-\vec{a})=0$; $\forall\,\vec{a}\in \mathrm{V}$.

Зададим на {V,R} операцию, ставящую в соответствие любому вектору $\vec{a}\in \mathrm{V}$ и любому

числу $\lambda\in \mathrm{R}$ новый вектор $\vec{b}\in \mathrm{V}$, обозначая эту операцию символом $\lambda\cdot\vec{a}$ и называя ее ***произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число λ.*** Предположим, что эта операция обладает следующими свойствами:

5. $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{a}$, $\forall\lambda,\mu\in \mathrm{R}$, $\forall\,\vec{a}\in \mathrm{V}$

6. $(\lambda\mu)\cdot\vec{a}=\lambda(\mu\cdot\vec{a})$, $\forall\lambda,\mu\in \mathrm{R}$, $\forall\,\vec{a}\in \mathrm{V}$;

7. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $\forall\lambda\in \mathrm{R}$, $\forall\,\vec{a},\vec{b}\in \mathrm{V}$;

8. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$, $\forall\,\vec{a}\in \mathrm{V}$.

Определение 3.1. Множество V, на котором заданы операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа, удовлетворяющие свойствам 1-8 называется вещественным векторным пространством (или просто - векторным пространством).

Определение 3.2. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ называется вектор $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_n\vec{a}_n$, а числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ - **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение 3.3 Совокупность векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$; если же для заданных векторов равенство выполняется только тогда, когда все $\lambda_i = 0 \ (i = 1,2,...,n)$, то вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называют **линейно зависимыми**.

Определение 3.3 Если в V существует n линейно независимых векторов, а любая система из (n + 1) вектора линейно зависима, то натуральное число n называется размерностью векторного пространства V : dim V = n.

Определение 3.4 Упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ называется базисом пространства V , если

1. система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ линейно независима;

2. $\forall\ \vec{x} \in V\ \exists x_i \in R\ (i = 1, n) \mid \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$

Упорядоченная система чисел x_i называется координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$. Натуральное число n называется размерностью базиса.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема.3.1 Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно.

Теорема 3.2 Если dim V = n, то в V любая совокупность из n линейно независимых векторов образует базис.

Теорема 3.3 Если в V существует базис из n векторов, то dim V = n.

4. Базис и система координат на плоскости и в пространстве

Теорема 4.1. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны: $\vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ **.**

Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Любые два ненулевых неколлинеарных вектора образуют базис плоскости. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - базис, тогда любой вектор $\vec{x}$ на плоскости можно представить и притом единственным образом в виде: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. **Такое представление вектора называют** разложением вектора по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2$**, а коэффициенты** x_1, x_2 **–** координатами **разложения.**

Теорема 4.1. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны:

$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c} -$компланарны.

Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Любые три ненулевых некомпланарных вектора образуют базис трехмерного пространства. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис, тогда любой вектор $\vec{x}$ трехмерного пространства можно представить и притом единственным образом в виде: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x\vec{e}_3$. **Такое пред-**

ставление вектора называют разложением вектора по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$**, а коэффициенты** x_1, x_2, x_3 **–** координатами **разложения.**

С базисом можно связать **систему координат**, которая состоит из фиксированного начала координат - точки *O,* и базиса. Каждой точке *A* соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$, который называется **радиус-вектором** точки. Координаты радиуса-вектора при разложении по базису называются **координатами точки** в построенной системе координат

Базис, образованный единичными взаимно перпендикулярными векторами называется декартовым, а соответствующая система координат - **декартовой прямоугольной системой координат**.

Обычно векторы декартового базиса в пространстве обозначают как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а координаты вектора $\vec{a}$ относительно декартова базиса как x, y, z.

В общем случае введенный в пространстве базис называют **аффинным**, и, соответственно, систему координат, состоящую из произвольной точки O и векторного аффинного базиса пространства, называют **аффинной системой координат** этого пространства. Точка O - **начало** аффинной системы координат.

Для любой системы координат (не только декартовой) справедливы следующие **свойства:**

1) линейные операции над векторами сводятся к таким же операциям над их соответствующими координатами;

2) координаты вектора равны разностям соответствующих координат его начала и конца;

3) векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Утверждение 4.1. Если $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, $\lambda \neq -1$, то для любой точки О, не принадлежащей прямой АВ, справедливо равенство

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{1+\lambda} \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, то из условия следует, что

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right) \text{ или } (1+\lambda)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}.$$

5. Скалярное произведение векторов

Определение 5.1. Углом между двумя векторами называется наименьший из углов, образованных векторами, если их приложить к одной точке. Угол между векторами обозначается как $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ или строчными греческими буквами (например, φ) .

Определение 5.2. Скалярным произведением векторов называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними; обозначают скалярное произведение как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ или $\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle$:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi \text{, где } \varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}}. \tag{5.1}$$

Свойства скалярного произведения векторов:

1) коммутативность: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2) линейность по двум аргументам:

$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right),\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ где λ - любое число;

$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a},b+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$

3) положительная определенность $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2\geq 0$ при этом $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}=0$.

Вычисление скалярного произведения в декартовом базисе:

если $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ *и* $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$, *то*

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b\,. \qquad (5.2)$$

С помощью скалярного произведения решаются следующие **задачи**:

1. Определение длины вектора: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}$

В частности, для декартового базиса:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\ ; \qquad (5.3)$$

3. Определение проекции одного вектора на направление другого:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$$

4. Определение косинуса угла между векторами:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\ . \qquad (5.4)$$

В частности, из формулы (4.4) следует условие ортогональности векторов (с учетом того, то нулевой вектор ортогонален любому):

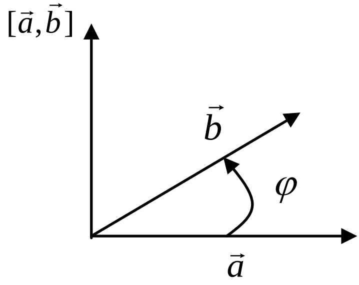
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$$

6. Векторное произведение векторов

Определение 6.1. Векторным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый как $[\vec{a}, \vec{b}]$, удовлетворяющий условиям:

– вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

– векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ образуют правую тройку, то есть если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$ приведены к общему началу, то из конца $[\vec{a}, \vec{b}]$ поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на меньший угол происходит против часовой стрелки;



– длина $[\vec{a}, \vec{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi \text{, где } \varphi = \widehat{\vec{a}\vec{b}},$$

Векторное произведение обладает **свойствами**:

1) Антикоммутативность: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

2) Линейность по обоим аргументам:

$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$, где λ – скаляр;

$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}]=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c}];[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{c}]$.

Если известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в декартовом базисе: $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ и $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$, то их векторное произведение можно представить в виде:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \qquad (6.1)$$

7. Смешанное произведение векторов

Определение 7.1 **Смешанным произведением** трех ненулевых некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ и $\vec{c}$.

Обозначается смешанное произведение как $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$ или $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Смешанное произведение обладает следующими **свойствами**:

1) Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку, то смешанное произведение равно численно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. В частности, три вектора компланарны тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

2) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$,

3) $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a},)=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$;

4) Линейность по всем трем аргументам.

Если известны координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в декартовом базисе: $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$, $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ и $\vec{c} = (x_c, y_c, z_c)$, то их векторное произведение можно вычислить по формуле:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \qquad (7.1)$$

8. Примеры решения задач

Задача 1. Разложить вектор $\vec{a} = (5,6)$ по базису $\vec{e}_1 = (-1,3)$ и $\vec{e}_2 = (1,-2)$.

Решение: Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ как (x_1, x_2); тогда $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ или в координатной форме $\begin{cases} 5 = -x_1 + x_2 \\ 6 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$. Решив эту систему, получаем $x_1 = 16; x_2 = 21$.

Ответ: $\vec{a} = 16\vec{e}_1 + 21\vec{e}_2$.

Задача 2. Найти угол между векторами $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 120°.

Решение. По определению скалярного произведения, находим $(\vec{m}, \vec{n}) = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 120^\circ = -0{,}5$, $(\vec{m}, \vec{m}) = |\vec{m}|^2 = 1$, $(\vec{n}, \vec{n}) = |\vec{n}|^2 = 1$.

Используя свойства скалярного произведения, вычислим $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

$\left(\vec{a},\vec{a}\right)$ и $\left(\vec{b},\vec{b}\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a},\vec{b}\right) &= \left(2\vec{m}+4\vec{n},\vec{m}-\vec{n}\right) = 2\left(\vec{m},\vec{m}\right)-2\left(\vec{m},\vec{n}\right)+4\left(\vec{n},\vec{m}\right)-4\left(\vec{n},\vec{n}\right)= \\ &= 2\left|\vec{m}\right|^2+2\left(\vec{m},\vec{n}\right)-4\left|\vec{n}\right|^2=-3\end{aligned};$$

$$\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2=\left|2\vec{m}+4\vec{n}\right|^2=4\left(\vec{m},\vec{m}\right)+16\left(\vec{m},\vec{n}\right)+16\left(\vec{n},\vec{n}\right)=12;$$

$$\left(\vec{b},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{m}-\vec{n}\right|^2=\left(\vec{m},\vec{m}\right)-2\left(\vec{m},\vec{n}\right)+\left(\vec{n},\vec{n}\right)=3.$$

Теперь вычислим косинус искомого угла по формуле (5.4):

$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}$. Таким образом, искомый угол равен 120°.

Ответ: 120°.

Задача 3. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{m}-3\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми равен 30°.

Решение. Найдем векторное произведение векторов $\vec{a}=4\vec{m}-3\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, используя его свойства:

$$\begin{aligned}\left[4\vec{m}-3\vec{n},\vec{m}-2\vec{n}\right] &= 4\left[\vec{m},\vec{m}\right]-8\left[\vec{m},\vec{n}\right]-3\left[\vec{n},\vec{m}\right]+6\left[\vec{n},\vec{n}\right]= \\ &= 8\left[\vec{n},\vec{m}\right]-3\left[\vec{n},\vec{m}\right]=5\left[\vec{n},\vec{m}\right]\end{aligned}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах, численно совпадает с длиной векторного произведения, таким образом,

$$S=\left|\left[4\vec{m}-3\vec{n},\vec{m}-2\vec{n}\right]\right|=5\left|\left[\vec{n},\vec{m}\right]\right|=5\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=5\sin 30^\circ=2{,}5.$$

Ответ. 2,5.

Задача 4. В декартовой системе координат вычислить координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного векторам $\vec{a} = (2,3,4)$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$.

Решение: Искомый вектор коллинеарен вектору $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. По формуле (6.1), получаем:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 14\vec{j} - 6\vec{k}$$

. Так как $|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 14^2 + 6^2} = 2\sqrt{62}$, то искомый вектор

$$\vec{e} = \pm \frac{1}{2\sqrt{62}}(4,-14,-6) = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{62}}, -\frac{7}{\sqrt{62}}, -\frac{3}{\sqrt{62}}\right).$$

Ответ: $\pm\left(\frac{2}{\sqrt{62}}, -\frac{7}{\sqrt{62}}, -\frac{3}{\sqrt{62}}\right)$

Задача 5. В декартовой системе координат даны координаты последовательных вершин параллелограмма ABCD: A(1,2,3); B(-2,0,4); C(3 ,1,5). Вычислить:

1) координаты вершины D;
2) острый угол между диагоналями параллелограмма;
3) площадь параллелограмма;
4) длину высоты AK параллелограмма, проведенную из вершины A к стороне CD;

Решение: 1) Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Пусть *D(x,y,z),* тогда

$\overrightarrow{AB}=(-3,-2,1)$, $\overrightarrow{DC}=(3-x,1-y,5-z)$. Из равенства векторов следует равенство соответствующих координат, поэто-

му $3-x=-3,\ 1-y=-2,\ 5-z=1$, отсюда $x=6,\quad y=3,\quad z=4$.

2) Вычислим угол φ между векторами, направленными по диагоналям параллелограмма $\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$ и $\overrightarrow{BD}=(8,3,0)$ по формуле (5.4): $\cos\varphi=\dfrac{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\dfrac{2\cdot 8+(-1)\cdot 3+2\cdot 0}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{64+9}}=\dfrac{13}{3\sqrt{73}}$.

Так как $\cos\varphi>0$, то угол $\varphi=\arccos\dfrac{13}{3\sqrt{73}}$ – острый.

3) По определению векторного произведения векторов его длина численно равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах. Вычислим сначала векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}=(-3,-2,1)$ и $\overrightarrow{AD}=(5,1,1)$ по формуле (6.1), получаем

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3\vec{i}-8\vec{j}+7\vec{k}.$$

Таким образом,

$$S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\sqrt{(-3)^2+(-8)^2+7^2}=\sqrt{122}.$$

4) Так как $S_{ABCD}=AK\cdot CD$, то

$$AK=\frac{S_{ABCD}}{CD}=\frac{\sqrt{122}}{\sqrt{9+4+1}}=\sqrt{\frac{61}{7}}.$$

Ответ: 1) $(6{,}3{,}4)$; 2) $\arccos\dfrac{13}{3\sqrt{73}}$; 3) $\sqrt{122}$; 4) $\sqrt{\dfrac{61}{7}}$.

Задача 6. Даны декартовы координаты вершин тетраэдра ABCD: A(1,2,3), B(-1,2,2,), C(2,0,3), D(0,1,-2), требуется

1) определить какую тройку образуют векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ взятые в указанном порядке;

2) вычислить объем тетраэдра;

3) вычислить длину высоты тетраэдра, опущенной из вершины D на плоскость ABC.

Решение: 1) Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB} = (-2{,}0{,}-1), \overrightarrow{AC} = (1{,}-2{,}0), \overrightarrow{AD} = (-1{,}-1-5)$ по формуле (7.1):

$$\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 3 = 23 \cdot$$

Так как смешанное произведение векторов, взятых в указанном порядке, положительно, то векторы образуют правую тройку.

2) Объем тетраэдра составляет шестую часть объема параллелепипеда, поэтому, согласно свойству 1) смешанного произведения векторов, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6} \cdot 23 = 3\dfrac{5}{6}$.

3) Высота DO тетраэдра совпадает с высотой параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$, поэтому ее можно вычислить, разделив объем параллелепипеда V на площадь его осно-

вания S, то есть $DO=\dfrac{V}{S}=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$. Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}.$$

Таким образом, $DO=\dfrac{23}{\sqrt{4+1+16}}=\dfrac{23}{\sqrt{21}}$.

Ответ. 1) правую; 2) $3\dfrac{5}{6}$; 3) $\dfrac{23}{\sqrt{21}}$.

Замечание. Смешанное произведение в данном пункте можно было вычислить по определению, с помощью скалярного произведения

$$\left(\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right)=\left(\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right],\overrightarrow{AD}\right)=(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)+4\cdot 5=23.$$

Задача 7. Даны три вектора $\vec{a}=(8,4,1)$, $\vec{b}=(2,-2,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$. Найдите единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ и $\vec{a},\vec{d},\vec{c}$ имели противоположные направления.

Решение. Из условия компланарности векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{d}$ следует, что $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$. Так как вектор $\vec{d}$ ортогонален вектору $\vec{c}$, то

$(\vec{d}, \vec{c})=0$, поэтому

$\left(\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b},\vec{c}\right)=0$ или $\lambda_1\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\lambda_2\left(\vec{b},\vec{c}\right)=0$. Так как $\left(\vec{a},\vec{c}\right)=13$, $\left(\vec{b},\vec{c}\right)=1$, то $13\lambda_1+\lambda_2=0$, отсюда $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}-13\lambda_1\vec{b}=\lambda_1\left(8-26;4+26;1-13\right)=6\lambda_1\left(-3,5,-2\right)$,

$\left|\vec{d}\right|=6\left|\lambda_1\right|\sqrt{9+25+4}=6\left|\lambda_1\right|\sqrt{38}.$ Так как по условию длина вектора

равна 1, то $\left|\lambda_1\right|=\dfrac{1}{6\sqrt{38}}$.

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-24$$

Так как $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)<0$, то эта упорядоченная тройка образует левую тройку векторов, поэтому тройка $\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}$ - должна быть правой . Так как

$$\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\ -5 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=8\cdot\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-5 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=40+12-8=44>0,$$

то $\lambda_1>0$. Таким образом $\vec{d}=\left(-\dfrac{3}{\sqrt{38}},\dfrac{5}{\sqrt{38}},-\dfrac{2}{\sqrt{38}}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{38}},\dfrac{5}{\sqrt{38}},-\dfrac{2}{\sqrt{38}}\right)$.

Задача 8. В основании параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, все ребра которого равны 1, лежит прямоугольник ABCD, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$. На диагонали A_1C_1 выбрана точка E так что A_1E: EC_1=2:1. Требуется

1) разложить вектор $\overrightarrow{AE}$ по базису $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$;

2) вычислить длину вектора $\overrightarrow{AE}$.

*Решение***.** 1) *Первый способ*. Воспользуемся формулой (4.1), получаем $\overrightarrow{AE} = \dfrac{\overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{AC_1}}{3}$. Так как $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, то

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AA_1} + 2\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)}{3} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Второй способ.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}\right).$$

Так как $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AD}$, то

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

2) $\overrightarrow{AE} = \sqrt{\overrightarrow{AE}^2} = \sqrt{\left(\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\right)^2}$. Вычислим скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{AE}$:

$$\left(\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\right)^2 = \left|\overrightarrow{AA_1}\right|^2 + \frac{4}{9}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) + \left|\overrightarrow{AD}\right|^2\right) +$$

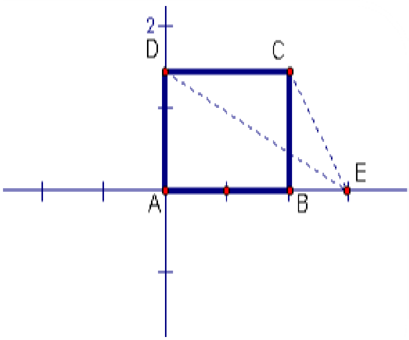
$$+\frac{4}{3}\left(\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\right)\right)=1+\frac{4}{9}\cdot 2+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{29}{9}.$$

Таким образом, $\overrightarrow{AE}=\sqrt{\overrightarrow{AE}^2}=\frac{\sqrt{29}}{3}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

Задача 9. Дан прямоугольник ABCD со сторонами AB = 2 и BC = $\sqrt{3}$. На прямой AB выбрана точка E так, что $\angle AED=\angle CED$. Найдите AE .

Решение. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке A как показано на рисунке. Вычислим координаты вершин прямоугольника: $B(2,0)$, $C(2,\sqrt{3})$, $D(0,\sqrt{3})$. Так как уравнение прямой AB $y=0$, то координаты точки E можно записать в виде $E(x_0,0)$. Для определения абсциссы точки E воспользуемся равенством углов $\angle AED$ и $\angle CED$. Для этого вычислим косинусы углов между векторами $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{ED}$ и $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{ED}$ соответственно. Имеем:



$\overrightarrow{EA}=(-x_0,0)$, $\overrightarrow{ED}=(-x_0,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{EC}=(2-x_0,\sqrt{3})$,

$$\cos \widehat{\overrightarrow{EA}\overrightarrow{ED}} = \frac{\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{ED}\right)}{\left|\overrightarrow{EA}\right|\left|\overrightarrow{ED}\right|} = \frac{x_0^2}{|x_0|\sqrt{x_0^2+3}},$$

$$\cos \widehat{\overrightarrow{EC}\overrightarrow{ED}} = \frac{\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED}\right)}{\left|\overrightarrow{EC}\right|\left|\overrightarrow{ED}\right|} = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 3}{\sqrt{\left(x_0^2+3\right)\left((2-x_0)^2+3\right)}}.$$

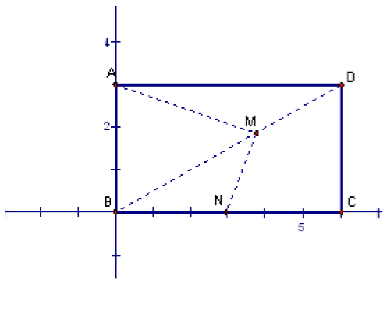
Приравняв полученные значения косинусов углов, получаем уравнение для определения абсциссы точки E:

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 + 3}{\sqrt{(2-x_0)^2+3}} = |x_0| \Leftrightarrow x_0^2 - 4x + 3 = 0.$$

Получаем два возможных значения абсциссы точки E: 1 или 3, поэтому $\overrightarrow{EA} = (-1{,}0)$ или $\overrightarrow{EA} = (-3{,}0)$ и, соответственно, AE=1 или AE=3.

Ответ: 1 или 3.

Задача 10. Дан прямоугольник ABCD, в котором BC=2AB. На диагонали BD взята точка M, такая, что $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{3}{2}$. Точка N – середина стороны BC. Докажите, что $\angle AMN = 90^\circ$. и треугольник NMA подобен треугольнику ABC.



Решение. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B как показано на рисунке. Пусть *AB=a*, тогда *A(0, a), C(2a, 0), D(2a, a), N(a, 0).*

Определим координаты (x, y) точки M из условия $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$, получаем $(x, y) = \frac{3}{5}(2a, a)$, отсюда $M\left(\frac{6}{5}a, \frac{3}{5}a\right)$. Вычислим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}a, -\frac{2}{5}a\right)$ и $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{5}a, -\frac{3}{5}a\right)$:

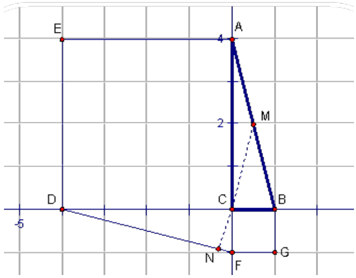
$\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN}\right) = -\frac{6}{25}a^2 + \frac{6}{25}a^2 = 0,$ следовательно, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MN},$ и $\angle AMN = 90^\circ.$

Для доказательства второй части утверждения вычислим отношения $\frac{AM}{BC}$ и $\frac{MN}{AB}$:

$\frac{AM}{BC} = \frac{\sqrt{\frac{36}{25}a^2 + \frac{4}{25}a^2}}{2a} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, $\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{1}{25}a^2 + \frac{9}{25}a^2}}{a} = \frac{\sqrt{10}}{5}$. Так как $\frac{AM}{BC} = \frac{MN}{AB}$ и $\angle AMN = \angle ABC,$ то треугольник NMA подобен треугольнику ABC.

Задача 11. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты ACDE и BCFG. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой DF.

Решение. Пусть *DC=a, AC=b.* Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке С как показано на рисунке, тогда A(0,b), B(a,0), E(-b,b), D(-b,0), F(0,-a), G(a,-a), M(0,5a; 0,5b), $\overrightarrow{CM}=(0{,}5a;0{,}5b)$, $\overrightarrow{DF}=(b;-a)$.

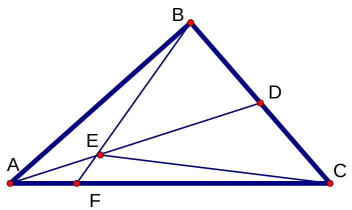


Так как $\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{DF}\right)=\frac{1}{2}\cdot ab-\frac{1}{2}ba=0$, то $\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{DF}$, поэтому прямая MN перпендикулярна прямой DF, что и требовалось доказать.

Задача 12. На медиане AD треугольника ABC взята точка E, причем AE:ED=1:3. В каком отношении прямая BE делит сторону AC?

Решение. Воспользуемся формулой (4.1), получаем,

$\overrightarrow{CE}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\lambda\cdot\overrightarrow{CD}}{1+\lambda}$, где по условию $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{ED}}=\dfrac{1}{3}$, $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, то есть



$$\overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{CB}.$$

С другой стороны, $\overrightarrow{CE}=\dfrac{\overrightarrow{CF}+\mu\cdot\overrightarrow{CB}}{1+\mu}$, где $\mu=\dfrac{\overrightarrow{FE}}{\overrightarrow{EB}}$, Пусть

$\overrightarrow{CF} = x \cdot \overrightarrow{CA}$ тогда $\overrightarrow{CE} = \dfrac{x}{1+\mu}\overrightarrow{CA} + \dfrac{\mu}{1+\mu}\overrightarrow{CB}$. Так как разложение вектора в данном базисе *единственное,* то $\dfrac{x}{1+\mu} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{\mu}{1+\mu} = \dfrac{1}{8}$, отсюда $\mu = \dfrac{1}{7}, x = \dfrac{6}{7}$. Таким образом, получаем $\dfrac{CF + FA}{CF} = \dfrac{7}{6}$ или $\dfrac{AF}{FC} = \dfrac{1}{7}$.

Ответ 1:7.

Проверочная работа:

1. Найти вектор, коллинеарный вектору $\vec{a} = (-2,4,1)$, если его длина равна $\sqrt{7}$ и он направлен в противоположную сторону.
2. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?
3. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2,4,-3)$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
4. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2,4,-3)$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
5. Найти внутренний угол треугольника ABC при вершине A, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C (3,2,1).
6. При каких значениях α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ортогональны

7. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$.

8. Вычислить площадь параллелограмма ABCD, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C (3,2,1).

9. Определить, какую тройку образуют векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в указанном порядке, если $\vec{a} = (8,4,1)$, $\vec{b} = (2,-2,1)$, $\vec{c} = (1,1,1)$.

10. Вычислить объем тетраэдра ABCD, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C (3,2,1), D(2,2,2).

11. Проверить, лежат ли точки A, B, C и D в одной плоскости, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C (3,2,1), D(6,3,3).

12. Преобразовать выражения $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\right]$ и $\left[\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}\right]$.

Контрольная работа

Варианты 1-5

Задача 1. Даны декартовы координаты четырех вершин A,B,C и A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти:

1) координаты вершин D и D_1;

2) координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного плоскости ABC, если векторы $\overrightarrow{AB}, \vec{e}, \overrightarrow{AD}$ в указанном порядке образуют правую тройку;

3) объем тетраэдра A_1ABC;

4) длину высоты AK грани ABCD, проведенную перпендикулярно CD;

5) длину высоты A_1H параллелепипеда, проведенную перпендикулярно плоскости ABC.

6) Найти координаты вектора $\overrightarrow{AD_1}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$.

B1	A(-1,3,5) B(-1,3,0) C(3,5,1) A_1(-4,-2,2)	B2	A(2,-2,3) B(2,4,0) C(4,3,3) A_1 (1,-2,1)	B3	A(1,2,3) B(-4,-1,1) C(1,5,3) A_1 (6,-1,4)	B4	A(0,-2,3) B(1,-2,6) C(4,-1,2) A_1 (1,2,1)	B5	A(2,1,0) B(2,-3;2) C(4,7,-1) A_1 (1,6,1)

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$. Вычислите:

1) угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 3$ и угол между ними равен 150°.

2) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 3$ и угол между ними равен 150°.

Варианты 6-10

Задача 1. Даны декартовы координаты четырех вершин A,B,C и D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти:

1) координаты вершин D и A_1;

2) координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного плоскости ABC, если векторы $\vec{e}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ в указанном порядке образуют левую тройку;

3) объем тетраэдра A_1ABC;

4) длину высоты CK грани ABCD, проведенную перпендикулярно AD;

5) длину высоты A_1H параллелепипеда, проведенную перпендикулярно плоскости ABC.

6) Найти координаты вектора $\overrightarrow{AA_1}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AD}$.

B6	A(-1,0,5) B(-1,3,0) C(3,-1,1) D_1(4,2,2)	B7	A(2,2,3) B(2,4,0) C(4,0,3) D_1 (-1,2,1)	B8	A(1,-2,3) B(-4,1,1) C(1,5,3) D_1 (6,-2,4)	B9	A(0,2,3) B(1,-2,4) C(4,-1,2) D_1 (1,0,-1)	B10	A(1,1,0) B(1,-3;2) C(4,2,-1) D_1 (1,-2,1)

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$. Вычислите:

1) угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 120°.

2) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 120°.

Варианты 11-15

Задача 1. Даны декартовы координаты четырех вершин A,B,C и A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти:

1) координаты вершин B_1 и D_1;

2) координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного плоскости AA_1B_1 если векторы $\overrightarrow{A_1B_1}, \vec{e}, \overrightarrow{A_1A}$ в указанном порядке образуют левую тройку;

3) объем тетраэдра CAA_1B_1;

4) длину высоты AK грани AA_1BB_1, проведенную к стороне BB_1;

5) длину высоты CH параллелепипеда, перпендикулярную плоскости AA_1B_1.

6) Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1C}$ в базисе $\overrightarrow{A_1A}, \overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1}$.

В 11	A(-1,3,5) B(-1,3,0) C(3,5,1) A_1(-4,-2,2)	В 12	A(2,-2,3) B(2,4,0) C(4,3,3) A_1 (-1,2,1)	В 13	A(1,2,3) B(-4,-1,1) C(1,5,3) A_1 (6,-1,4)	В 14	A(0,-2,3) B(1,-2,6) C(4,-1,2) A_1 (1,2,1)	В 15	A(2,1,0) B(2,-3;2) C(4,7,-1) A_1 (1,6,1)

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$. Вычислите:

1) угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 60°.

2) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 60°.

Варианты 16-20

Задача 1. Даны декартовы координаты четырех вершин A,B,C и D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти:

1) координаты вершин C_1 и A_1;

2) координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного плоскости CC_1D_1 если векторы $\vec{e}, \overrightarrow{C_1C}, \overrightarrow{C_1D_1}$ в указанном порядке образуют правую тройку;

3) объем тетраэдра $A_1C_1D_1C$;

4) длину высоты C_1K грани CC_1D_1D, проведенную перпендикулярно DD_1;

5) длину высоты A_1H параллелепипеда, проведенную перпендикулярно плоскости CC_1D_1.

6) Найти координаты вектора $\overrightarrow{AA_1}$ в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD_1}, \overrightarrow{AD}$.

В 16	A(-1,0,5) B(-1,3,0) C(3,-1,1) D_1(4,2,2)	В 17	A(2,2,3) B(2,4,0) C(4,0,3) D_1 (-1,2,1)	В 18	A(1,-2,3) B(-4,1,1) C(1,5,3) D_1 (6,-2,4)	В 19	A(0,2,3) B(1,-2,4) C(4,-1,2) D_1 (1,0,-1)	В 20	A(1,1,0) B(1,-3;2) C(4,2,-1) D_1 (1,-2,1)

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$. Вычислите:

1) угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 4$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 30°.

2) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 4$, $|n| = 1$ и угол между ними равен 30°.

Варианты 21-25

Задача 1. Даны декартовы координаты четырех вершин A,B,C и A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти:

1) координаты вершин B_1 и D;

2) координаты единичного вектора $\vec{e}$, перпендикулярного плоскости ADC если векторы $\overrightarrow{AC}, \vec{e}, \overrightarrow{DA}$ в указанном порядке образуют левую тройку;

3) объем тетраэдра B_1ADC;

4) длину высоты AK грани ABCBD, проведенную к стороне BC;

5) длину высоты B_1H параллелепипеда, перпендикулярную плоскости ADC.

6) Найти координаты вектора $\overrightarrow{B_1D}$ в базисе $\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{B_1C_1}$.

В 21	A(-1,2,5) B(-1,2,0) C(3,5,1) A_1(-4,-2,2)	В 22	A(2,-2,3) B(2,3,0) C(3,3,3) A_1 (-1,2,1)	В 23	A(1,2,3) B(-4,-1,1) C(1,4,3) A_1 (5,-1,4)	В 24	A(0,-2,3) B(1,-2,5) C(4,-1,2) A_1 (1,2,1)	В 25	A(2,1,0) B(2,-3;2) C(4,5,-1) A_1 (1,4,1)

Задача 2. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}$. Вычислите:

1) угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 2$ и угол между ними равен 45°.

2) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{m}| = 2$, $|n| = 2$ и угол между ними равен 45°.

ГЛАВА 2. Линейные образы

1. Прямая на плоскости

Различные виды уравнений прямой на плоскости

Любой ненулевой вектор параллельный данной прямой называют *направляющим вектором данной прямой*, а любой вектор, перпендикулярный данной прямой - её *нормальным вектором.*

Общим уравнением прямой на аффинной плоскости называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{1.1}$$

где вектор $\vec{l} = (-B, A)$ является направляющим вектором прямой.

Если уравнение (1.1) задает прямую в прямоугольной системе координат, то вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой.

Множество прямых, проходящих через данную точку, называется пучком прямых. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = (m, n)$ может быть записано в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{1.3}$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t. \end{cases} \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3) называется *каноническим* уравнением прямой, уравнения (1.4) называются *параметрическими уравнениями прямой,* t - параметр.

В частности, уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \tag{1.5}$$

а уравнение прямой, проходящей через токи $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$, имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1.6}$$

Уравнение (5) называется *уравнением прямой в отрезках,* так как $|a|$ и $|b|$ - это длины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Пусть задана прямоугольная (декартова) система координат. *Углом наклона прямой к оси Ox* называется угол , на который надо повернуть ось *Ox* вокруг точки пересечения прямой с осью *Ox*, чтобы ось *Ox* совпала с прямой

Тангенс угла наклона прямой к оси *Ox* называется *угловым коэффициентом прямой* и обозначается через *k*. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) определяет также пучок прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, за исключением прямой, параллельной оси ординат.

Если прямая пересекает ось *Oy* в точке $M_1(0,b)$, то уравнение (7) принимает вид

$$y = kx + b \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом *k*.

Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая определяется расстоянием *p* от начала координат до данной прямой и углом α между положительным направлением оси *Ox* и осью *m,* проходящей через начало координат *O* перпендикулярно данной прямой. Уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{1.9}$$

называется *нормальным уравнением прямой.*

Для того чтобы привести общее уравнение (1.1) к виду (1.9) надо умножить обе части уравнения *нормирующий множитель* $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Знак нормирующего множителя λ противоположен знаку С.

Если дана некоторая точка $M(x_1, y_1)$ на плоскости, то число

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \tag{1.10}$$

называется отклонением точки М от данной прямой. При этом

- если $\delta > 0$, точка М и начало координат лежат по разные стороны относительно данной прямой,
- если $\delta < 0$, точка М и начало координат лежат по одну сторону от прямой,
- если $\delta = 0$, точка М лежит на данной прямой.

Модуль отклонения равен расстоянию от данной точки до прямой. Таким образом, если прямая задана нормальным уравнением (1.9), то расстояние *d* от точки $M(x_1, y_1)$ до этой прямой можно вычислить по формуле

$$d = |\delta| = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p| \tag{1.10}$$

или, если прямая задана общим уравнением (1), то по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.11}$$

Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Углом φ *между двумя прямыми* называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

1) Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами : $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|, \qquad (1.12)$$

Из (1.12) следуют

(1.12.1) условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2,\ b_1 \neq b_2$;

(1.12.2) условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 k_2 = -1$.

2) Если прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$,

$\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$ нормальные векторы прямых, то

$$\cos\varphi = \left| \frac{\langle \overline{n}_1, \overline{n}_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \right| = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|. \qquad (1.13)$$

Из (1.13) следуют

(1.13.1) условие параллельности прямых: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

(1.13.2) условие перпендикулярности прямых: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

3) Если прямые l_1 и l_2 с направляющими векторами $\vec{l}_1 = (m_1, n_1)$ и $\vec{l}_2 = (m_2, n_2)$ заданы каноническими (2) или параметрическими (3) уравнениями , то

$$\cos\varphi = \left|\frac{\langle \vec{l}_1, \vec{l}_2 \rangle}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|}\right| = \left|\frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}\right|. \qquad (1.14)$$

Из (1.14) следуют

(1.124.1) условие параллельности прямых (включая случай совпадения): $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$;

(1.14.2) условие перпендикулярности прямых:

$m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Заметим, что иногда углом между называют любой из смежных углов, образованных этими прямыми, в этом случае выражения в формулах (1.12)- (1.42) не следует брать по абсолютной величине.

Примеры решения задач

Задача1. Составить уравнение прямой, проходящей: через точку M_o(-1,4)

a) параллельно прямой $2x + 5y - 1 = 0$

b) перпендикулярно прямой $2x + 5y - 1 = 0$

c) под углом 45^o к прямой $2x + 5y - 1 = 0$

Решение: Воспользуемся уравнением (1.7). Получаем уравнение пучка прямых проходящих через точку M_o(-1,4)

$$y-4=k(x+1).$$

Отметим, что во всех случаях дана одна и та же прямая с угловым коэффициентом $k=-\frac{2}{5}$. Для определения угловых коэффициентов искомых прямых из пунктов a) и b) задачи воспользуемся соответственно условиями (1.12.1) и (1.12.2), получаем:

a) $y-4=-\frac{2}{5}(x+1)$ или $2x+5y-18=0$;

Замечание. Для решения пункта a) можно также воспользоваться формулой (1.2), получаем $2(x+1)+5(y-4)=0$ или $2x+5y-18=0$.

b) $y-4=\frac{5}{2}(x+1)$ или $5x-2y+13=0$.

Замечание. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой можно составить также, воспользовавшись формулами (1.3) или (1.4) .Смотрите решение задачи 2.

c) Для определения углового коэффициента искомой прямой в пункте c) воспользуемся формулой (1.12), имеем

$tg45^\circ=\left|\dfrac{k+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}k}\right|$ или $|5-2k|=|5k+2|$ или $\left[\begin{array}{l}5-2k=5k+2;\\5-2k=-5k-2\end{array}\right.$. Таким образом, получаем два возможных значения углового коэффициента искомой прямой: $k=\frac{3}{7}$ или $k=-\frac{7}{3}$, и ответом являются уравнения двух взаимно перпендикулярных прямых $3x-7y+31=0$ и

$7x+3y-5=0.$

Ответ. a) $2x+5y-18=0$; b) $5x-2y+13=0$; c) $3x-7y+31=0$ и $7x+3y-5=0.$

Задача 2. . Найти координаты проекции точки М(1,5) на прямую *a*, заданную уравнением $2x+3y-4=0$.

Решение. Требуется найти координаты точки пересечения данной прямой *a* с прямой a_1, проходящей через точку М перпендикулярно a.

Можно составить уравнение прямой a_1, воспользовавшись методом, предложенным в предыдущей задаче, а затем определить координаты точки пересечения прямых a и a_1, решив систему из двух линейных уравнений.

Рассмотрим более короткий метод решения, для этого составим параметрические уравнения (4) прямой a_1. Заметим, что нормальный вектор $\overline{n}=(2,3)$ прямой *a* является направляющим вектором искомой прямой a_1. Получаем:

$$\begin{cases} x=1+2\cdot t \\ y=5+3\cdot t. \end{cases}$$

Для определения координат точки пересечения прямых a и a_1 решим систему

$$\begin{cases} 2x+3y-4=0 \\ x=1+2\cdot t \\ y=5+3\cdot t. \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} 2(1+2t)+3(5+3t)-4=0 \\ x=1+2\cdot t \\ y=5+3\cdot t. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: (-1,2).

Задача 3. Площадь треугольника, отсекаемого прямой, проходящей через точку A(6, -2), от координатного угла равна 3. Составить уравнение этой прямой.

Решение. Так как площадь треугольника, отсекаемого прямой от координатного угла, равна половине произведения длин отрезков, отсекаемых прямой на осях координат, то для решения задачи удобнее всего воспользоваться уравнением прямой в отрезках (6).

Из условия задачи следует, что $\frac{1}{2}|a||b|=3$ и $\frac{6}{a}+\frac{-2}{b}=1$.

Получаем две системы:

$$\begin{cases} a=\frac{6}{b} \\ b-\frac{2}{b}=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a=-\frac{6}{b} \\ -b-\frac{2}{b}=1 \end{cases}$$

Решением первой системы являются пары (-6,-1) и (3,2). Вторая система не имеет решений. Получаем две прямых

$\frac{x}{-6}+\frac{y}{-1}=1$ или $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$. После очевидных преобразований можно привести полученные уравнения к виду (1.1).

Ответ: $x+6y+6=0$ или $2x+3y-6=0$.

Задача 4. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y+2=0$ и $x+y-3=0$.

Решение.

Воспользуемся свойством: биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла. Пусть точка M(x,y) принадлежит биссектрисе, вычислим расстояния от этой точки до данных прямых по формуле (1.11):

$$d_1=\frac{|3x-4y+2|}{\sqrt{9+16}}\quad d_2=\frac{|x+y-3|}{\sqrt{1+1}}$$

Используя условие равенств найденных расстояний, получаем уравнение :

$$\frac{|3x-4y+2|}{5}=\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}\text{ или }\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\cdot(3x-4y+2)=5\cdot(x+y-3))\\ \sqrt{2}\cdot(3x-4y+2)=-5\cdot(x+y-3)\end{array}\right..$$

Решая совокупность уравнений, получаем искомые уравнения прямых.

Ответ. $\left(3\sqrt{2}-5\right)\cdot x-\left(4\sqrt{2}+5\right)\cdot y+2\sqrt{2}+15=0$ и $\left(3\sqrt{2}+5\right)\cdot x-\left(4\sqrt{2}-5\right)\cdot y+2\sqrt{2}-15=0$.

Замечания.

1. Легко проверить, используя, например, критерий (1.13.2), что полученные прямые перпендикулярны (биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны).
2. Возможен другой способ решения данной задачи. Определить координаты точки пересечения данных прямых, а затем, воспользовавшись формулой (1.12) для вычисления угла между прямыми,

определить угловые коэффициенты искомых прямых из уравнения $\left|\frac{k-k_1}{1+k_1k},\right| = \left|\frac{k-k_2}{1+kk_2}\right|$, где k – угловой коэффициент биссектрисы, k_1 и k_2 - угловые коэффициенты данных прямых.

Задача 5. Доказать, что прямая $2x-3y+6=0$ не пересекает отрезка, ограниченного точками $M_1(-2; -3)$, $M_2(1; -2)$.

Решение. Отрезок M_1M_2 не будет пересекать данную прямую, если обе точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, то есть отклонения точек M_1 и M_2 от данной прямой имеют одинаковый знак.

Приведем уравнение прямой $2x-3y+6=0$ к нормальному виду (), для этого умножим обе части уравнения на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{4+9}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$. Получаем:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0.$$

Вычислим отклонение точек M_1 и M_2 от прямой $2x-3y+6=0$, получаем:

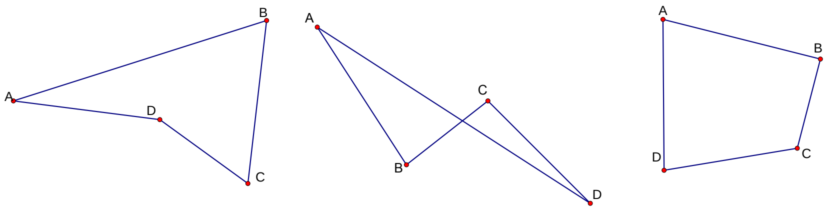
$$\delta_1 = -\frac{2}{\sqrt{13}}(-2) + \frac{3}{\sqrt{13}}(-3) - \frac{6}{\sqrt{13}} = -\frac{11}{\sqrt{13}} < 0$$

$$\delta_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}}(-2) - \frac{6}{\sqrt{13}} = -\frac{14}{\sqrt{13}} < 0.$$

Что и требовалось доказать.

Задача 6. Установить, является ли четырехугольник ABCD выпуклым, если A(-1; 6), B(-2; -4), C(7; -1), D(2; 9).

Решение: Четырехугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.



Для того чтобы доказать, что четырехугольник не является выпуклым достаточно найти две его вершины, расположенные в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через две другие вершины. Для того чтобы доказать, что четырехугольник выпуклый необходимо убедиться, что он расположен в одной полуплоскости относительно прямых, проходящих через какие-либо три его стороны.

Составим уравнение стороны AB, используя формулу (1.5), получаем

$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{-10}$ или $10x-y+16=0$. Приведем полученное уравнение к нормальному виду (1.9) и вычислим отклонения от данной прямой точек C и D, имеем

$$\frac{-10x+y-16}{\sqrt{101}}=0$$

$$\delta_C = \frac{-10\cdot 7 - 1 - 16}{\sqrt{101}} = -\frac{87}{\sqrt{101}} < 0$$

$$\delta_D = \frac{-10\cdot 2 + 9 - 16}{\sqrt{101}} = -\frac{27}{\sqrt{101}} < 0\,.$$

Таким образом, относительно прямой AB точки C и D лежат в одной полуплоскости.

Рассмотрим теперь прямую BC и точки A и D получаем соответственно:

$$\frac{x - 3y - 10}{\sqrt{10}} = 0$$

$$\delta_A = \frac{-1 - 3\cdot 6 - 10}{\sqrt{10}} = -\frac{29}{\sqrt{10}} < 0$$

$$\delta_D = \frac{2 - 3\cdot 9 - 10}{\sqrt{10}} = -\frac{35}{\sqrt{10}} < 0\,.$$

Таким образом, относительно прямой BC точки A и D лежат в одной полуплоскости.

Для прямой CD и точек A и B получаем соответственно:

$$\frac{2x + y - 13}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\delta_A = \frac{2\cdot(-1) + 6 - 13}{\sqrt{5}} = -\frac{9}{\sqrt{5}} < 0$$

$$\delta_B = \frac{2\cdot(-2) + 4 - 13}{\sqrt{5}} = -\frac{13}{\sqrt{5}} < 0\,.$$

Таким образом, относительно прямой CD точки A и B лежат в одной полуплоскости.

Ответ. Данный четырехугольник является выпуклым.

Задача 7. Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма ABCD (система координат декартова) A(1;2), B(-1;3),C(-4;-2), найти:

1) параметрические уравнения стороны AD;
2) нормальное уравнение прямой AD;
3) общее уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону AD;
4) площадь треугольника, отсекаемого высотой BK от координатного угла;
5) длину высоты BK;
6) координаты центра тяжести треугольника ABD;
7) угловой коэффициент диагонали BD;
8) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Решение. 1) Прямая AD проходит через точку A параллельно прямой BC, следовательно, можно взять в качестве направляющего вектора данной прямой вектор $\overline{CB} = 3i + 5j$. Воспользовавшись формулой (1.4), получаем уравнения $x = 1 + 3t;\ \ y = 2 + 5t.$

2) Исключая параметр t из полученных в пункте 1) параметрических уравнений, получаем общее уравнение прямой AD: $5x - 3y + 1 = 0.$ Приведем уравнение к нормальному виду (1.9), умножив на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{25+9}} = -\frac{1}{\sqrt{34}}$, получаем $-\frac{5}{\sqrt{34}}x + \frac{3}{\sqrt{34}}y - \frac{1}{\sqrt{34}} = 0.$

3) Прямая ВК проходит через точку В перпендикулярно вектору $\overline{CB} = 3i + 5j$, поэтому, воспользовавшись формулой (1.2), получаем $3(x+1) + 5(y-3) = 0$ или $3x + 5y - 12 = 0$.

4) Запишем уравнение ВК «в отрезках» (1.6), для этого разделим обе части общего уравнения прямой ВК, полученное в пункте 3) на 12. Получаем: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2{,}4} = 1$. Таким образом, длины отрезков, отсекаемых прямой ВК на координатных осях, равны 4 и 2,4, а площадь искомого прямоугольного треугольника равна $\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$.

5) Длину высоты ВК можно найти как расстояние от точки В до прямой AD. Воспользовавшись результатом пункта 2) и формулой (1.10), получаем

$$BK = \left| \frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{34}} \right| = \frac{13}{\sqrt{34}}.$$

Второй способ: найдем координаты точки К, как точки пересечения прямых AD и ВК, воспользовавшись уравнениями этих прямых, полученными в пунктах 1) и 3). Получаем систему:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \\ 3x + 5y - 12 = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем: $3(1+3t) + 5(2+5t) - 12 = 0$, $t = -\dfrac{1}{34}$,

$x = 1 - \dfrac{3}{34} = \dfrac{31}{34}$; $y = 2 - \dfrac{5}{34} = \dfrac{63}{34}$. Таким образом, $K\left(\dfrac{31}{34}, \dfrac{63}{34}\right)$ и

$$BK=\sqrt{\left(\frac{31}{34}+1\right)^2+\left(\frac{63}{34}-3\right)^2}=\frac{13}{\sqrt{34}}.$$

6) Центр тяжести треугольника – точка пересечения его медиан. Как известно, медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то медианой треугольника ABD является отрезок AO, где O- середина AC. Найдем координаты точки O по формуле (4.1) главы 1,где $\lambda=1$, получаем O(-1,5; 0). Координаты центра тяжести треугольника ABD, обозначим его за M, находим по формуле (4.1) главы 1, где $\lambda=2$: $x=\frac{1-2\cdot 1{,}5}{3}=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, то есть $M\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$.

7) Прямая BD проходит через точки B и O, где O – точка пересечения диагоналей. Поэтому можно составить ее уравнение, воспользовавшись формулой (1.4), получаем, $\frac{x+1}{-1{,}5+1}=\frac{y-3}{-3}$ или $y=6x+9$ поэтому угловой коэффициент прямой BD равен 6.

8) Тангенс угла φ между диагоналями параллелограмма можно найти по формуле (1.12). Вычислим угловой коэффициент прямой AC. Аналогично решению в п 7) ,

ем: $\frac{x-1}{-4-1}=\frac{y-2}{-2-2}$ или $y=0{,}8x+1{,}2$, то есть угловой коэффициент прямой AC равен 0,8. Таким образом, $tg\varphi=\left|\frac{6-0{,}8}{1+6\cdot 0{,}8}\right|=\frac{26}{29}$.

Ответ: 1) $x = 1 + 3t; \quad y = 2 + 5t$; 2) $-\frac{5}{\sqrt{34}}x + \frac{3}{\sqrt{34}}y - \frac{1}{\sqrt{34}} = 0$; 3) $3x + 5y - 12 = 0$; 4) 4,8; 5) $\frac{13}{\sqrt{34}}$; 6) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 7) $\frac{26}{29}$.

Задача 8. Даны координаты трех последовательных вершин трапеции ABCD (система координат декартова) A(2;2), B(-4;3),C(4;-2). Известно, что BC||AD и AD=3BC. Найти :

1) площадь трапеции;
2) координаты точки пересечения диагоналей трапеции.

Решение. 1) Вычислим длину высоты трапеции *h*, как расстояние от точки A до прямой BC. Для этого составим уравнение прямой BC по формуле (1.5):

$$\frac{x+4}{4+4} = \frac{y-3}{-2-3}$$ или *5x+8y-4=0.*

Используя формулу (1.11), получаем $h = \frac{|5 \cdot 2 + \cdot 8 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{25+64}} = \frac{22}{\sqrt{89}}$. Теперь вычислим длины оснований, используя формулу для вычисления расстояния между двумя точками:

$BC = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$, AD=3BC= $BC = 3\sqrt{89}$

Таким образом, площадь S трапеции равна

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{4\sqrt{89}}{2} \cdot \frac{22}{\sqrt{89}} = 44.$$

2) Обозначим точу пересечения диагоналей трапеции через O, тогда AO:OC=AD:BC=3:1. Вычислим координаты точки O, используя

формулу (4.1) главы 1, получаем:

$$x = \frac{2+3\cdot 4}{4} = \frac{7}{2}, \quad y = \frac{2-3\cdot 2}{4} = -1.$$ Таким образом, O(3,5; -1).

Ответ: 1) 44; 2) (3,5; -1).

Проверочная работа

Даны декартовы координаты трех точек M(2,3); N(-3,1) и P(1,-1). Требуется составить

1) каноническое уравнение прямой MN;
2) параметрические уравнения прямой MN;
3) общее уравнение прямой MN;
4) уравнение прямой MN в отрезках;
5) нормальное уравнение прямой MN;

Вычислить расстояние от точки P до прямой MN.

Контрольная работа

Варианты 1-5

Задача 1. Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма ABCD (система координат декартова)

B1	B(-1;3) C(3;5) D(-4;-2)	B2	B(2;4) C(4;3) D(-1;-2)	B3	B(-4;-1) C(1;5) D(6;1)	B4	B(-2;6) C(4;-1) D(1;2)	B5	B(-3;2) C(4;7) D(6;1)

Найти:

1) параметрические уравнения стороны AD;

2) площадь треугольника, отсекаемого прямой AD от координатного угла;

3) нормальное уравнение высоты DK, опущенной из вершины D на сторону AB;

4) длину высоты DK;

5) координаты центра тяжести треугольника ABC;

6) угловой коэффициент диагонали AC;

7) тангенс угла между диагоналями параллелограмма.

Задача 2. Дан параллелограмм ABCD (см. условие задачи 1) и точка E(1;1). Проверить аналитически

1) пересекает ли отрезок BE прямую AD;

2) является ли четырехугольник BCDE выпуклым.

Найти точку, симметричную точке E относительно прямой AD.

Варианты 6-10.

Задача 1. Даны координаты трех последовательных вершин трапеции ABCD (система координат декартова). Известно, что AB||CD и CD=2AB.

B6	A(1;3) B(-3;5) C(4;-2)	B7	A(2;-4) B(4;-3) C(-1;2)	B8	A(4;-1) B(-1;5) C(-6;1)	B9	A(2;-6) B(-4;1) C(-1;-2)	B10	A(-3;2) B(4;-7) C(6;-1)

Найти:

1) параметрические уравнения стороны CD;

2) площадь треугольника, отсекаемого прямой CD от координатного угла;

3) нормальное уравнение высоты AK, опущенной из вершины A на сторону DC;

4) площадь трапеции,

5) координаты точки пересечения диагоналей трапеции;

6) угловой коэффициент диагонали BD;

7) тангенс угла между диагоналями трапеции.

8)

Задача 2**.** Дан параллелограмм ABCD (см. условие задачи 1) и точка E(1;1). Проверить аналитически

1) пересекает ли отрезок BE прямую CD;

2) является ли четырехугольник ABCE выпуклым.

Найти точку, симметричную точке E относительно прямой CD.

Варианты 11- 15.

Задача 1. Даны координаты трех последовательных вершин параллелограмма ABCD(система координат декартова)

B11	A(1;3) B(-3;5) C(4;-2)	B12	A(2;-4) B(4;-3) C(-1;2)	B13	A(4;-1) B(-1;5) C(-6;1)	B14	A(2;-6) B(-4;1) C(1;-2)	B15	A(-3;2) B(4;-7) C(6;-1)

Найти:

1) параметрические уравнения стороны CD;

2) общее уравнение высоты BK, опущенной из вершины B на сторону CD;

3) длину высоты BK;

4) координаты центра тяжести треугольника ABD;

5) площадь треугольника, отсекаемого диагональю BD от координатного угла;

6) угловой коэффициент диагонали BD;

7) тангенс острого угла параллелограмма.

Задача 2. Дан параллелограмм ABCD (см. условие задачи 1) и точка E(-1;-1). Проверить аналитически

1) пересекает ли отрезок BE прямую CD;

2) является ли четырехугольник ABCE выпуклым.

Найти точку, симметричную точке E относительно прямой CD.

Варианты 16-20.

Задача 1. Даны координаты трех последовательных вершин трапеции ABCD (система координат декартова). Известно, что AB||CD и CD=0,4AB.

B16	B(-1;3) C(3;5) D(4;2)	B17	B(2;4) C(4;3) D(-1;-2)	B18	B(-4;1) C(1;5) D(6;1)	B19	B(-2;6) C(4;-1) D(1;2)	B20	B(-3;2) C(4;7) D(6;1)

Найти:

1) параметрические уравнения стороны AB;

2) общее уравнение высоты BK, опущенной из вершины C на сторону AB;

3) площадь трапеции;

4) координаты точки пересечения диагоналей трапеции;

5) площадь треугольника, отсекаемого диагональю АС от координатного угла.

6) угловой коэффициент диагонали АС;

7) тангенс острого угла трапеции.

Задача 2. Дан параллелограмм ABCD (см. условие задачи 1) и точка E(-1;-1). Проверить аналитически

1) пересекает ли отрезок CE прямую AB;
2) является ли четырехугольник BCDE выпуклым.

Найти точку, симметричную точке E относительно прямой AB.