Известия вузов. Математика
2009, №1, с. 3–43

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Посвящается 50-летию журнала.

А.В. АРГУЧИНЦЕВ, В.А. ДЫХТА, В.А. СРОЧКО

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ: НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Аннотация. В статье предложен обзор результатов по теории принципа максимума Понтрягина (вместе с его обращением), нелокальным условиям оптимальности, базирующимся на использовании функций типа Ляпунова (решений неравенств Гамильтона–Якоби). Особый акцент ставится на обращение принципа максимума в достаточное условие глобального и сильного минимума без предположений линейно-выпуклости, нормальности и управляемости. Приведен обзор вычислительных методов решения классических задач оптимального управления и описаны нестандартные процедуры нелокального улучшения допустимых процессов в линейных и квадратичных задачах. Кроме того, представлен ряд последних результатов по вариационному принципу максимума в гиперболических управляемых системах — наиболее сильному (в первом порядке) необходимому условию оптимальности, по отношению к которому принцип максимума выступает как следствие.

Ключевые слова: принцип максимума, неравенства Гамильтона–Якоби, нелокальные вычислительные методы, вариационный принцип максимума.

УДК: 517.9

Abstract. This paper surveys theoretical results on the Pontryagin maximum principle (together with its conversion) and nonlocal optimality conditions based on the use of the Lyapunov-type functions (solutions to the Hamilton–Jacobi inequalities). We pay special attention to the conversion of the maximum principle to a sufficient condition for the global and strong minimum without assumptions of the linear convexity, normality, or controllability. We give the survey of computational methods for solving classical optimal control problems and describe nonstandard procedures of nonlocal improvement of admissible processes in linear and quadratic problems. Furthermore, we cite some recent results on the variational principle of maximum in hyperbolic control systems. This principle is the strongest first order necessary optimality condition; it implies the classical maximum principle as a consequence.

Keywords: maximum principle, Hamilton–Jacobi inequalities, nonlocal computational methods, variational maximum principle.

Поступила 21.05.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 07-01-00741, 08-01-00709, 08-01-98007.

Введение

В статье представлен обзор результатов по теории принципа максимума Понтрягина (вместе с его обращением), нелокальным условиям оптимальности, базирующимся на использовании функций типа Ляпунова (решений неравенств Гамильтона–Якоби), нестандартным (и тоже нелокальным) численным методам улучшения применительно к классическим задачам оптимального управления в различных вариантах. Кроме того, представлен ряд последних результатов по вариационному принципу максимума в гиперболических управляемых системах — наиболее сильному (в первом порядке) необходимому условию оптимальности, по отношению к которому классический принцип максимума выступает как следствие.

Естественно, отбор материала для обзора субъективен и связан с интересами авторов и теми направлениями, которые развиваются Иркутской школой оптимального управления. Охарактеризуем обсуждаемые направления более подробно.

Принцип максимума: необходимость и достаточность. В год 100-летия со дня рождения выдающегося математика XX-го века, первооткрывателя фундаментального принципа максимума (ПМ) академика Льва Семеновича Понтрягина оставить в стороне эту проблематику совершенно невозможно. Несмотря на необозримое море публикаций даже последних лет, посвященных теории ПМ для различных классов задач, мы останавливаемся лишь на почти классической задаче с общими концевыми ограничениями. Для нее, помимо знаменитой монографии [1] с дополнением [2], общеизвестны различные доказательства, отшлифованные до учебно-методического уровня [3]–[10]. Но в данной статье акцент ставится на обращении ПМ в достаточное условие глобального и сильного минимума [11]–[13] без каких-либо предположений линейно-выпуклости, нормальности и управляемости.

Относительно более сложных задач с фазовыми и смешанными ограничениями, а также оптимизации дифференциальных включений мы отсылаем читателя к работам [1], [3], [5], [7], [9], [14]–[25] и к монографиям [26], [27], выгодно отличающимся исследованием нетривиальных модельных задач.

Нелокальные методы, основанные на неравенствах Гамильтона–Якоби. Представлены результаты по двухсторонним оценкам нижней грани целевого функционала и базирующимся на них условиям оптимальности. Для этого применяются два множества вспомогательных функций типа Ляпунова — сильные L-функции, монотонные вдоль всех траекторий управляемой системы, и слабые L-функции, монотонные вдоль некоторых "выживающих" траекторий. Эти L-функции являются решениями пары неравенств Гамильтона–Якоби (и уравнения, в частности). С использованием произвольного множества сильных L-функций получаются достаточные условия оптимальности [11], [12], [28]–[30], [31], допускающие обращение и обобщающие соответствующие результаты Каратеодори для задач вариационного исчисления [32], [33], [3] и Кротова [34], [35] в оптимальном управлении (вместе с другими известными их модификациями). Второй тип слабых L-функций (применение которых известно в гораздо меньшей степени) позволяет оценивать нижнюю грань функционала сверху [36], [37] и служит источником построения субоптимальных процессов и методов улучшения (на этот эффект мы затрудняемся дать ссылки). Оба типа решений неравенств (и уравнения) Гамильтона–Якоби применялись в [38], [39] для приближенного и точного описания множеств достижимости управляемой системы с последующим выводом необходимых и достаточных условий оптимальности.

Изложение почти исключительно связано с программными управлениями, так что метод динамического программирования Беллмана и другие интенсивно развивающиеся и содержательные ветви теории позиционного управления (не только оптимального) остались в стороне. По этой проблематике мы рекомендуем обзорные статьи [36]–[41]. Они существенно опираются на современную теорию уравнений и неравенств Гамильтона–Якоби [20], [42]–[44]. Отметим, что работы уральской школы академика Н.Н. Красовского (не только в обозреваемом направлении) весьма полно представлены в обзорной статье [45], посвященной юбилею А.И. Субботина, внесшему общепризнанный вклад не только в развитие теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка, но и в наведение определенного порядка в этой области (путем доказательства эквивалентности многообразных понятий решения).

Вычислительные методы оптимального управления. Разработка вычислительных (итерационных) методов решения задач оптимального управления органично связана с условиями оптимальности и традиционно использует типовые конструкции, аппроксимации и процедуры варьирования, полученные в рамках качественной теории. Исторически в этой области определились и активно развиваются следующие подходы и направления исследований:

1) итерационные процедуры ПМ — локальные и нелокальные аппроксимации функционалов, вспомогательные задачи на максимум функции Понтрягина, разнообразные схемы игольчатого варьирования управлений, методы игольчатой и фазовой линеаризации, процедуры нелокального улучшения [46]–[54], [27];

2) градиентные методы оптимального управления — классические и неклассические вариации функционалов, вспомогательные задачи на минимум вариаций, слабое варьирование управлений, квазиградиентные методы [55]–[58], [53];

3) методы улучшения на основе условий оптимальности Кротова — линейно-квадратичная реализация разрешающей функции, работа с дифференцируемой функцией Гамильтона и уравнением Риккати, варьирование управлений с помощью регуляризации основного функционала с целью обеспечения сильного и слабого улучшения [31], [34], [35], [59];

4) методы оптимального управления в режиме реального времени — опорные процедуры поиска программных решений, неклассическая технология решения проблемы оптимального синтеза [60], [61];

5) методы математического программирования в задачах оптимального управления — дискретные аппроксимации моделей оптимального управления, расчетные формулы для производных сложных функций по компонентам дискретного управления, адаптация методов конечномерной оптимизации к специфике дискретных задач, вопросы сходимости аппроксимаций [62]–[64], [56].

В качестве актуальных и перспективных проблем дальнейшего развития конструктивной теории оптимального программного управления выделим следующие направления:

— разработка и исследование специализированных методов (как минимум, нелокального характера) численного решения определенных классов задач оптимального управления (линейные, квадратичные и др.);

— разработка обоснованных схем и слабоэвристических стратегий поиска глобальных решений специальных классов невыпуклых задач (билинейные, d-c задачи и др.), создание вычислительных методов со свойством улучшения экстремальных управлений в общих задачах;

— построение и использование нестандартных (с точки зрения качественной теории) аппроксимаций функционалов задачи, конструктивная формализация процедур варьирования, обоснованное построение и аналитическое решение вспомогательных задач на поиск элементов варьирования.

Вариационный принцип максимума. В заключительной части статьи авторы остановились на оригинальном необходимом условии оптимальности первого порядка, более сильном, чем классический принцип максимума. Речь идет о вариационном принципе максимума (ВПМ), который оказалось возможным получить для некоторых классов задач управления распределенными системами гиперболического типа. Отличительная особенность ВПМ состоит в том, что он формулируется через условие экстремума в некотором семействе бесконечномерных (вариационных) задач оптимизации (вместо поточечного условия максимума функции Понтрягина в классическом принципе максимума [7], [56], [65], [66]). Именно эта особенность оправдывает термин "вариационный", хотя известны и другие принципы с этой характеристикой, не имеющие отношения к обсуждаемому ВПМ.

Первый результат этого типа получен в [67] для задач оптимизации канонических систем (с двумя семействами ортогональных характеристик). Отметим следующие моменты. Во-первых, в этой работе ВПМ был получен путем расшифровки абстрактного ПМ для задач управления обыкновенной дифференциальной системой в банаховом пространстве. Во-вторых, вариационный принцип максимума выступал в этой работе лишь в качестве промежуточного результата на пути доказательства классического ПМ (который, как уже упоминалось, есть следствие ВПМ).

Роль и самостоятельная значимость ВПМ была вскрыта несколько позже в серии публикаций [68]–[71], посвященных исследованию задач оптимизации, тесно связанных между собой каноническими гиперболическими системами и системами Гурса–Дарбу. Однако метод исследования уже кардинально отличался от [67] и состоял в прямом варьировании управления в характеристических полосках или конечных семействах характеристических полосок. Этим же путем ВПМ был распространен и на полулинейные гиперболические системы с распределенными управлениями [68], [72]. В [73]–[75] эти же классы задач с дополнительными функциональными и фазовыми ограничениями на нефиксированном прямоугольнике исследованы с помощью модифицированных v-вариаций Дубовицкого-Милютина и абстрактного принципа максимума.

В данной статье дан краткий обзор результатов одного из авторов [76]–[79] для задач оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболических систем. Доказаны необходимые условия оптимальности типа вариационного принципа максимума для двух различных способов задания управляемых граничных условий. Показано, что в задаче с граничным управлением возможно сильное (игольчатое) варьирование, а не только слабое, что считалось с тех пор, как была установлена невозможность перенесения на данную задачу классического принципа максимума.

Как отмечалось в обзорной статье [54], накопленные в теории ВПМ результаты свидетельствуют, что нетривиального усиления классического ПМ следует ожидать в задачах управления системами, в которых состояние системы или производные состояния могут иметь разрывы, подчиняющиеся управляемым связям динамического характера. Именно так обстоит дело и в сосредоточенных системах с неограниченным и импульсным управлением [80]–[82].

1. Принцип максимума Понтрягина: необходимость и достаточность

Рассмотрим следующую *задачу* (P) с общими концевыми ограничениями:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u(t) \in U, \tag{1.1}$$

$$\varkappa(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \tag{1.2}$$

$$J = l(b) \to \min .$$

Здесь $b = (t_0, x_0, t_1, x_1)$ — концевой вектор, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, размерности x, u, $\varkappa$, k равны n, m, $d(\varkappa)$, $d(k)$ соответственно (вообще $d(z)$ — размерность вектора z), множество $U \subset R^m$ произвольно и все функции, входящие в описание задачи, будем считать удовлетворяющими обычным предположениям теории принципа максимума: непрерывности по всем аргументам и гладкости по t, x и компонентам вектора b. Обсуждаемые далее исключения из этих предположений будут оговариваться.

Процессом управляемой системы (1.1) назовем любую пару функций $\sigma = \big((x(t), u(t)),\ t \in \Delta = [t_0, t_1]\big)$, состоящую из измеримого ограниченного управления $u(\cdot)$ и абсолютно непрерывной (липшицевой) траектории $x(\cdot)$, определенных на отрезке времени Δ (зависящем от σ) и удовлетворяющих почти всюду на Δ системе (1.1). Множество всех процессов системы (1.1) обозначим через Σ_f, а множество допустимых процессов задачи (P) (подчиняющихся дополнительно концевым ограничениям (1.2)) — через Σ. Таким образом, в краткой записи задача (P) принимает вид $J(\sigma) \to \min$, $\sigma \in \Sigma$.

В поставленной форме Майера (по терминологии из вариационного исчисления) задача (P) часто называется канонической [9], [14]–[16], [30] или стандартной [10], [31]. Хотя в классической монографии [1] задачи с подвижным левым концом $(t_0, x(t_0))$ не рассматривались, стандартная постановка оказалась очень удобной не только в силу ее симметричности, но и возможностей сведения к ней других классов задач, подчас внешне весьма далеких от классической. Например, именно подвижность концевых точек позволяет свести к стандартной многие задачи оптимизации гибридных (дискретно-непрерывных, импульсных) систем [82]–[87] путем отображения составляющих подсистем на общий отрезок новой временной оси и "размножения" числа фазовых и управляющих переменных (см., напр., [87]).

1.1. *Гладкий принцип максимума.* В подавляющем большинстве публикаций ПМ формулируется как необходимое условие сильного локального экстремума (а то и вообще глобального). Однако точный тип экстремума, которому соответствует ПМ, был установлен А.Я. Дубовицким и А.А. Милютиным и назван понтрягинским в честь первооткрывателя ПМ. Примечательно, что этот тип минимума (менее глубокий, нежели сильный) не соответствует понятию "локальный" ни одной из топологий на множестве процессов и определяется как минимум на некотором множестве последовательностей.

Сначала напомним, что процесс $\overline{\sigma} = \{\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta} = [\overline{t}_0, \overline{t}_1]\} \in \Sigma$ доставляет сильный минимум в задаче (P), если найдется такое открытое множество $Q \subset R \times R^n$, содержащее график траектории $\overline{x}$, что процесс $\overline{\sigma}$ глобально оптимален в задаче (P), дополненной ограничением $(t, x(t)) \in Q \quad \forall t \in \Delta$. Это сужение задачи (P) на множество Q будем обозначать через (P(Q)).

Следуя [88] (см. также [9], [27], [30]), будем говорить, что последовательность

$$\sigma^k = \Big\{x^k(t), u^k(t) \mid t \in \Delta^k = [t_0^k, t_1^k]\Big\} \subset \Sigma$$

сходится к $\overline{\sigma}$ в понтрягинском смысле, если $(t_0^k, t_1^k) \to (\overline{t}_0, \overline{t}_1)$ и

$$\max\Big\{|x^k(t) - \overline{x}(t)| t \in \Delta^k \cap \overline{\Delta}\Big\} \to 0,$$

$$\int_{\Delta^k \cap \overline{\Delta}} |u^k(t) - \overline{u}(t)| \to 0,$$

существует компактное множество $K \subset R \times R^n \times R^m$ такое, что $(t, x^k(t), u^k(t)) \in K$ почти всюду на $\Delta^k \quad \forall k$.

Заметим, что в случае задачи с фиксированным временем и ограниченным множеством U сходимость в смысле Понтрягина равносильна сходимости по норме $\|\sigma\| = \|x\|_C + \|u\|_{L_1}$.

Говорят, что процесс $\overline{\sigma}$ доставляет понтрягинский минимум в задаче (P), если не существует последовательности $\{\sigma^k\} \subset \Sigma$, сходящейся к $\overline{\sigma}$ в понтрягинском смысле, и такой, что $J(\sigma^k) < J(\overline{\sigma}) \quad \forall k$.

Важное свойство понтрягинского минимума состоит в его инвариантности по отношению к различным преобразованиям задачи (P) [15], [30].

Для формулировки фундаментального ПМ [1], [2] введем набор множителей Лагранжа $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t), \psi_t(t))$, функцию Понтрягина $H(t,x,\psi,u) = \langle \psi, f(t,x,u)\rangle$, $\psi \in R^n$, и концевую функцию Лагранжа

$$L(b) = \alpha_0 l(b) + \langle \alpha, \varkappa(b)\rangle + \langle \beta, k(b)\rangle$$

(зависимость H, L от λ опускаем).

Принцип максимума.

Если процесс $\overline{\sigma}$ доставляет понтрягинский минимум в задаче (P), то существует набор λ, удовлетворяющий условиям $d(\alpha) = d(\varkappa)$, $d(\beta) = d(k)$, функции $\psi(t)$, $\psi_t(t)$ абсолютно непрерывны на $\overline{\Delta}$,

$$\alpha_0 \geq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \langle \alpha, \varkappa(\overline{b})\rangle = 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0,$$

$$\dot{\psi} = -H_x(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t)), \quad \dot{\psi}_t = -H_t(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t)), \tag{1.3}$$

$$\psi(\overline{t}_i) = (-1)^i L_{x_i}(\overline{b}), \quad \psi_t(\overline{t}_i) = (-1)^i L_{t_i}(\overline{b}), \quad i = 0,1, \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} H(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t)) + \psi_t(t) = 0 \ \text{ почти всюду на } \ \overline{\Delta}, \\ H(t,\overline{x}(t),\psi(t),u) + \psi_t(t) \leq 0 \ \ \forall (t,u) \in \overline{\Delta} \times U. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Отметим, что родоначальники ПМ не включали в формулировку сопряженное уравнение для ψ_t (соответствующей времени), а выводили его из более привычного условия максимума по управлению функции H, вытекающего из (1.5). В приведенной форме ПМ получается, если использовать v-вариации Дубовицкого–Милютина [14]–[16], вообще говоря, более сильные, нежели пакеты игольчатых вариаций, применявшиеся в [1], или вариации скольжения [3], [9], [14], [15]. Конечно, этот эффект принципиален для более сложных классов задач, нежели (P).

Упомянем так называемую гамильтонову форму ПМ. По образцу [9], [30] введем функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}(t,x,\psi) = \sup\{H(t,x,\psi,u) \mid u \in U\} \tag{1.6}$$

и множества

$$\begin{gathered} \operatorname{dom}\mathcal{H} = \{(t,x,\psi) \mid \ \text{в (1.6) супремум достигается}\}, \\ \arg\max \mathcal{H}(t,x,\psi) = \{u \in U \mid H(t,x,\psi,u) = \mathcal{H}(t,x,\psi)\}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Тогда условия (1.3), (1.5) эквивалентны включениям

$$\begin{gathered} (t,\psi(t),\overline{x}(t)) \in \operatorname{dom}\mathcal{H} \ \ \forall t \in \overline{\Delta}, \\ \overline{u}(t) \in \arg\max \mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\psi(t)) \ \text{ почти всюду на } \ \overline{\Delta} \end{gathered} \tag{1.8}$$

и первому из сопряженных уравнений (1.3) (см. [30]).

1.2. *Некоторые обобщения.* Укажем уточнения, которые следует внести в формулировку гладкого ПМ, если ослаблять требования к главному атрибуту задачи (P) — управляемой системе (1.1).

(a) Если зависимость функции f от времени измерима или даже непрерывна, то уравнение для ψ_t в (1.3) и условия трансверсальности по времени — вторые соотношения в (1.4) — теряют смысл, и поэтому переменную ψ_t надлежит исключить из формулировки ПМ. В частном случае задачи (P_Δ) с фиксированным отрезком времени Δ это сделать просто: надо опустить вторые соотношения в (1.3), (1.4), а условие максимума (1.5) заменить на привычное

$$H(t,\overline{x}(t),\psi(t),\overline{u}(t)) \geq H(t,\overline{x}(t),\psi(t),u) \ \ \forall (t,u) \in \Delta \times U. \tag{1.9}$$

Гораздо сложнее обстоит дело в случае задачи (P).

Если функция f непрерывна, а класс допустимых управлений сужен до кусочно-непрерывных функций, то, исключая ψ_t как описано выше, условия трансверсальности по времени получают в виде

$$H(\bar{t}_i, \overline{x}(\bar{t}_i), \psi(\bar{t}_i), \overline{u}(\bar{t}_i)) = (-1)^{i+1} L_{t_i}(\overline{b}), \quad i = 0, 1, \tag{1.10}$$

а в условии максимума (1.9) полагают $\Delta = \overline{\Delta}$.

В общем случае измеримой зависимости f по t и ограниченности f, f_x на ограниченных множествах, публикации по которому весьма немногочисленны [17], [20], [84], [85], несколько неожиданной оказалась невозможность получить ПМ, если не предполагать ограниченности множества U, или же функции $f(t,x,u)$ в окрестности графика траектории $\overline{x}$ при $u \in U$. Точнее сказать, что на данный момент обойти эти условия ограниченности не удалось. Если предположения ограниченности выполнены, то в уже описанной модификации ПМ следует заменить условия трансверсальности по времени (1.10) на следующие:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess} \varlimsup_{t \to \bar{t}_i} \mathcal{H}(t, \overline{x}(\bar{t}_i), \psi(\bar{t}_i)) + (-1)^i L_{t_i}(\overline{b}) \geq 0, \\ &\operatorname{ess} \varliminf_{t \to \bar{t}_i} \mathcal{H}(t, \overline{x}(\bar{t}_i), \psi(\bar{t}_i)) + (-1)^i L_{t_i}(\overline{b}) \leq 0, \quad i = 0, 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

В этой записи использовано понятие существенных пределов измеримой ограниченной функции $h(t)$ в точке t_*:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess} \varlimsup h(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)} h(t) \Big), \\ \operatorname{ess} \varliminf h(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big(\operatorname*{ess\,inf}_{t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)} h(t) \Big). \end{aligned}$$

Ясно, что при нарушении условий ограниченности неравенства (1.11) теряют смысл в силу определения гамильтониана (1.6). Наглядный пример этому приведен в ([17], с. 106).

(б) Другое ближайшее обобщение ПМ связано с ослаблением предположения гладкости функции f по x в пределах обычного понятия дифференцируемости (без обращения к различным обобщенным производным из негладкого анализа, которое становится неизбежным, если зависимость f от x всего лишь липшицевая). Используя пакет игольчатых вариаций с последующим сужением задачи к конечномерной (по параметрам пакета как, напр., в [4], [10], [83]), в работах [89]–[92] (см. также указанные в них публикации) удалось получить ПМ для задачи (P_Δ) с фиксированным временем, когда функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, равномерно ограничена, функция $f(t, x, \overline{u}(t))$ липшицевая по x в трубке вдоль траектории $\overline{x}$ и дифференцируема только в точках $x = \overline{x}(t)$. Формулировка ПМ в этих предположениях не отличается от описанной в п. (а) для задачи (P_Δ).

(в) Лишь кратко коснемся более сложных задач с фазовыми и смешанными ограничениями, а также оптимизации дифференциальных включений.

Во-первых, в задачах с фазовыми ограничениями удалось получить информативный (невырожденный) ПМ [17], [25]. Дело в том, что ранние варианты ПМ для таких задач [1], [14] автоматически становились неинформативными (вырожденными), если хотя бы один конец траектории $\overline{x}$ оказывался на границе фазоограничения.

Далее, весьма изящное доказательство ПМ, основанное на вариациях скольжения, получено в [9], [93] для задач с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. Самый общий ПМ для задач с нерегулярными смешанными ограничениями, в развернутой форме первоначально изложенный в [14], представлен с полными доказательствами и примерами в последней монографии А.А. Милютина [16]. По сложности исследуемой задачи и филигранности техники она даже сейчас воспринимается как далеко опередившая время.

В этой связи отметим, что многочисленные принципы максимума для дифференциальных включений — объекта формально гораздо более общего, чем управляемые системы —

не перекрывают результатов этой книги (см. примеры в [16], [29], [94]). Как неоднократно отмечал ее автор, этот факт связан, во-первых, с жесткими предположениями на включения и, во-вторых, с тем обстоятельством, что доказательства ПМ для дифференциальных включений не связаны с каким-то классом подходящих вариаций. Примечательно, что предложенная в [94] техника (основанная на усреднении и сглаживании) сведения задачи оптимизации дифференциального включения к обычной задаче оптимального управления позволила получить вариант ПМ, существенно усиливающий ПМ Ф. Кларка [19]. Возможно, что именно эти исследования инспирировали развитие новой техники вариационного анализа включений с введения игольчатых вариаций [95].

Наконец, отметим два результата, стоящие несколько особняком. Это ПМ для задач с бесконечным горизонтом времени [96], играющих важную роль в экономической динамике, и вариационный ПМ для задач с линейным неограниченным управлением и коммутирующими векторными полями при компонентах управления [81]. Это единственный класс задач оптимизации обыкновенных динамических систем, для которого в первом порядке классический ПМ допускает нетривиальное усиление. Первоначально данный вариационный ПМ был установлен для задач оптимального импульсного управления с траекториями из L_∞ [80], [82].

1.3. *Достаточность в форме ПМ.* Возвращаясь к задаче (P), изложим наиболее общую из известных версию обращения ПМ в достаточное условие сильного или глобального минимума [11]–[13].

Назовем биэкстремалью управляемой системы любую тройку функций $\gamma=(\psi(t),\overline{x}(t),\overline{u}(t))$, определенную на некотором промежутке времени I, и такую, что $\overline{\sigma}=(\overline{x},\overline{u})\in\Sigma_f$ на I, $\psi(t)$ удовлетворяет на I сопряженной системе и выполнено условие максимума (1.5) (или (1.8)) с заменой отрезка $\overline{\Delta}$ на I. В этом случае $\overline{\sigma}$ назовем экстремалью системы (1.1), а $\psi(t)$ — соответствующей ей коэкстремалью.

Поясним, что это определение не предполагает допустимости $\overline{\sigma}$ (т. е. включения $\overline{\sigma}\in\Sigma$) и выполнения условий трансверсальности для коэкстремали $\psi(t)$, т. е. биэкстремаль определяется только системой (1.1). Если же считать, что эти условия выполнены при $I=\overline{\Delta}$, то γ становится биэкстремалью задачи (P), а $\overline{\sigma}$ — ее понтрягинской экстремалью. Ясно, что решение задачи (P) при любом выборе функций $\varkappa$, k, l следует искать среди экстремалей системы. Отметим, что в случае задачи (P_Δ) с фиксированным временем можно не вводить промежуток I и полагать $I=\overline{\Delta}=\Delta$. При нефиксированном времени, как правило, требуется включение $I\supset\overline{\Delta}$. Но, например, для задачи быстродействия это излишне.

Пусть $\overline{\sigma}\in\Sigma$ и найдется такое открытое множество $Q\subset R\times R^n$, содержащее график $\overline{x}$, что $\overline{\sigma}$ является экстремалью системы на интервале $I=\mathrm{pr}_t\,Q$. Таким образом, $\overline{\sigma}$ допускает продолжение на $I\supset\overline{\Delta}$ и существует соответствующее $\overline{\sigma}$ решение сопряженной системы $\psi(t)\mid t\in I$ такое, что $\gamma=(\psi(t),\overline{\sigma})$ — биэкстремаль системы на I.

Для таких $\overline{\sigma}$, Q и ψ определим следующие эквивалентные между собой расширенные условия максимума функций H и $\mathcal{H}$.

Условие $MH(\psi,Q)$. Почти всюду на I $(\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ есть решение задачи

$$H(t,x,\psi(t),u)+\dot{\psi}(t)x\to\max,\quad x\in Q(t),\quad u\in U. \tag{1.12}$$

Условие $M\mathcal{H}(\psi,Q)$. Почти всюду на I $\overline{x}(t)$ есть решение задачи

$$\mathcal{H}(t,x,\psi(t))+\dot{\psi}(t)x\to\max,\quad x\in Q(t). \tag{1.13}$$

Здесь $Q(t)$ — сечение множества Q, запись $a\,b$ означает скалярное произведение векторов a, b, и решение понимается в глобальном смысле.

Обозначим через $\Psi_+(Q)$ множество коэкстремалей, соответствующих $\overline{\sigma}$ и удовлетворяющих любому из условий $MH(\psi,Q)$ или $M\mathcal{H}(\psi,Q)$. Если $\Psi_+(Q)\neq\emptyset$, то назовем его порождающим множеством коэкстремалей на Q и сопоставим ему множество линейных функций $x\to\varphi^{\psi}(t,x)$, положив при $(t,x)\in Q$

$$\varphi^{\psi}(t,x)=\langle\psi(t),x-\overline{x}(t)\rangle,\quad \psi\in\Psi_+(Q). \tag{1.14}$$

Тогда обращение ПМ можно сформулировать следующим образом [13] (напомним, что через (P(Q)) обозначается сужение задачи (P) на множество Q).

Теорема 1.1. *Пусть для процесса $\overline{\sigma}$ найдутся такое открытое множество $Q\subset R\times R^n$ и порождающее множество коэкстремалей $\Psi_+(Q)$, что вектор $\overline{b}$ является точкой глобального минимума в следующей конечномерной концевой задаче* $(\mathrm{EP}(\Psi_+(Q)))$:

$$\begin{gathered} l(b)\to\min,\quad \varkappa(b)\le 0,\quad k(b)=0,\\ b\in Q\times Q,\quad \varphi^{\psi}(t_1,x_1)-\varphi^{\psi}(t_0,x_0)\le 0\quad \forall\psi\in\Psi_+(Q). \end{gathered} \tag{1.15}$$

Тогда $\overline{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче (P(Q)).

Прокомментируем эти достаточные условия.

1) Введение множества Q имеет двоякую цель. С одной стороны, если Q — все пространство (или априорно известная внешняя оценка возможных значений (t,x)), то теорема 1.1 дает условия глобальной оптимальности; в противном случае мы получаем условия сильного минимума. С другой стороны, глобально (по x) условия максимума (1.12), (1.13) могут не выполняться и введение Q придает большую гибкость достаточным условиям, которые становятся локальными. В задаче (P_Δ) в качестве Q может выступать трубка вдоль $\overline{x}$. Отметим, что если Q — внешняя оценка множества достижимости точек, то предположение открытости Q можно снять.

2) Помимо очевидной связи теоремы 1.1 с ПМ, вытекающей из определений биэкстремали и расширенных условий максимума, отметим следующее. Пусть M — множество наборов Лагранжа λ, обеспечивающих выполнение ПМ для $\overline{\sigma}$; тогда из теоремы 1.1 вытекает, что любой набор множителей Лагранжа для точки $\overline{b}$ в задаче (1.15) порождает некоторое $\lambda\in M$ (см. [11], [12]).

3) Расширенные условия максимума можно заменить на более жесткие условия вогнутости функций $H(t,x,\psi(t),u)$, $\mathcal{H}(t,x,\psi(t))$ на $\mathrm{co}\,(Q(t)\times U)$ и $\mathrm{co}\,(Q(t))$ соответственно, причем во втором случае необходимо проверить супердифференциальное включение

$$-\dot{\psi}(t)\in\partial_x\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\psi(t))\quad\text{на}\quad I.$$

Это часто выполняется в моделях экономики.

Пример 1.1 соответствует известной модели распределения инвестиций между факторами производства

$$\dot{x}_i=F(x)u_i,\quad i=\overline{1,n},\quad U=\Big\{u\in R^n_+\;\Big|\;\sum_{i=1}^n u_i=1\Big\},$$

где $F\ge 0$ — вогнутая при $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge 0$ производственная функция, обсуждаемые условия вогнутости выполнены при любой $\psi(t)\ge 0$. А это типично для содержательных задач в данной модели.

4) Главное достоинство достаточных условий теоремы 1.1 в сравнении с другими известными вариантами обращения ПМ (см. ссылки в [11], [12]) состоит в отсутствии априорных предположений единственности нормированного набора Лагранжа λ, соответствующего $\overline{\sigma}$, нормальности данного процесса (т. е. свойства $\alpha_0>0\ \ \forall\lambda\in M$) и управляемости (наглядные

примеры приведены в [11], [12]). Отметим, что даже в линейно-выпуклых задачах (напр., ляпуновского типа [4]), достаточность ПМ формулируется с единственным набором λ при $\alpha_0 > 0$.

5) Теорема 1.1 сохраняет силу и в задачах с измеримой зависимостью от t.

Пример 1.2 ([84]).

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u, \quad x(0) = 0,$$
$$\dot{x}_2 = r(t)u, \quad x(0) = 0,$$
$$0 \le u \le 1, \quad J = -x_2(t_1) - t_1 x_1(t_1) \to \min,$$

где t_1 свободно и

$$r(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [0, 2]; \\ \gamma, & t > 2, \quad \gamma > 0.5. \end{cases}$$

Пример можно интерпретировать как упрощенную модель оптимизации стратегии торговца ("челнока") при скачком повышающейся процентной ставке $r(t)$. На естественный вопрос: насколько велико должно быть γ, чтобы при $\overline{t}_1 = 2$ торговец свернул деятельность, теорема 1.1 в глобальном варианте дает значение $\gamma \ge 1.25$, что совпадает с ответом ПМ из [84].

Отметим, что при разрывной зависимости f от t трудности применения теоремы 1.1 концентрируются в решении концевой задачи (1.15) с липшицевыми входными данными, для которой какие-либо достаточные условия оптимальности неизвестны.

6) Совершенно другое обращение ПМ получено в [97] для задачи (P_Δ) при множестве $U = U(t)$, заданном функционально. Оно соответствует специфическому "локальному" минимуму на Σ в смысле метрики

$$\rho(\sigma, \overline{\sigma}) = \|x - \overline{x}\|_C + \operatorname{mes}\{t \mid u(t) \ne \overline{u}(t)\}$$

с дополнительным требованием ограниченности $\|u\|_{L_\infty}$ сколь угодно большим числом. Очевидно, данная метрика исключает слабые (равномерно малые в L_∞) вариации управления u, следовательно, для этого типа минимума становятся ненужными аналоги классического условия Якоби отсутствия сопряженных точек. Поэтому этот минимум является менее глубоким, чем сильный и понтрягинский. Достаточные условия его достижения включают в себя не только усиленное условие максимума функции H (в распространенных обозначениях — $\exists \varepsilon > 0$ и $\lambda \in M$: $\Delta_u H(t) \le -\varepsilon |u - u(t)|^2 \quad \forall (t, u) \in \Delta \times U(t)$), но и часть известного квадратичного условия понтрягинского минимума [28], [83], связанного с варьированием концов траектории $\overline{x}$. На наш взгляд, этот результат, хотя и представляет интерес, не вполне соответствует проблеме обращения ПМ, поскольку исследуемый тип минимума приходится ослаблять.

2. Условия оптимальности, основанные на неравенствах Гамильтона–Якоби

Классическое уравнение Гамильтона–Якоби (Г–Я) для управляемой системы (1.1) имеет вид

$$\Gamma[\varphi](t, x) := \varphi_t + \mathcal{H}(t, x, \varphi_x) = 0.$$

С учетом определения гамильтониана (1.6), (1.7), это уравнение вместе с парой соответствующих неравенств Г–Я запишем в следующем виде:

$$\Gamma[\varphi](t, x) \begin{cases} \le 0, \\ = 0, \\ \ge 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$(t,x)\in Q,\quad (t,x,\varphi_x)\in \operatorname{dom}\mathcal{H}. \tag{2.2}$$

Здесь, как и ранее, Q — открытое множество, позволяющее рассматривать суженную задачу (P(Q)) с допустимым множеством процессов $\Sigma(Q)$.

Чтобы выпукло оттенить идейную сторону обсуждаемых методов, не отвлекаясь на технические детали, в качестве решений неравенств и уравнений из (2.1), (2.2) будем рассматривать функции $\varphi(t,x)$, дифференцируемые и липшицевые на Q.

Через $\Phi_-(Q)$, $\Phi_0(Q)$, $\Phi_+(Q)$ обозначим множества решений из указанного класса, отвечающие последовательным случаям в (2.1). Заметим, что $\Phi_0(Q)$ можно считать подмножеством двух других множеств. Функции из этих множеств играют различные роли (и сферы применимости), и мы рассмотрим их в отдельности.

2.1. *Функции из $\Phi_-(Q)$: оценки функционала снизу и базовые достаточные условия оптимальности.* Любая функция $\varphi\in\Phi_-(Q)$ обладает ляпуновским свойством сильной монотонности на Q, т.е. невозрастания суперпозиции $\varphi(t,x(t))$ вдоль всех траекторий системы (1.1), проходящих по Q (т.е. с графиком из Q). Поэтому замкнутые множества подуровня $\mathcal{L}_c^-=\{(t,x)\mid \varphi(t,x)\le c\}$ такой функции сильно инвариантны для системы (1.1) при любом $c\in R$ [98]–[101]. Элементы из $\Phi_-(Q)$ назовем сильно монотонными L-функциями управляемой системы на Q.

Обозначим через $R(Q)$ множество пар точек (t_0,x_0), (t_1,x_1) из Q, соединенных траекториями управляемой системы, проходящими по Q. Назовем $R(Q)$ множеством достижимых точек из Q. Пусть Φ — произвольное множество функций из $\Phi_-(Q)$. Тогда $\forall\varphi\in\Phi$ и $\forall\sigma\in\Sigma_f(Q)$

$$\Delta\varphi(b):=\varphi(t_1,x(t_1))-\varphi(t_0,x(t_0))\le 0.$$

Поэтому имеет место включение

$$R(Q)\subset E(\Phi,Q):=\{b\mid \Delta\varphi(b)\le 0\ \forall\varphi\in\Phi\}. \tag{2.3}$$

Таким образом, любое множество сильно монотонных L-функций задает внешнюю оценку множества достижимых точек.

Сопоставим множеству Φ следующую вспомогательную концевую задачу (EP(Φ,Q)):

$$l(b)\to\inf,\quad \varkappa(b)\le 0,\quad k(b)=0, \tag{2.4}$$

$$b=(t_0,x_0,t_1,x_1)\in Q\times Q,\quad \Delta\varphi(b)\le 0\ \ \forall\varphi\in\Phi. \tag{2.5}$$

Из включения (2.3) вытекает оценка снизу значения задачи (P(Q)):

$$\inf J(\Sigma(Q))\ge \inf l(B(\Phi,Q)), \tag{2.6}$$

где $B(\Phi,Q)$ — допустимое множество в задаче (2.4)–(2.5). Кроме того, почти очевидной становится следующая

Теорема 2.1. *Пусть для процесса $\overline{\sigma}\in\Sigma(Q)$ найдется такое множество функций $\Phi\subset\Phi_-(Q)$, что вектор $\overline{b}=(\overline{t}_0,\overline{x}(\overline{t}_0),\overline{t}_1,\overline{x}(\overline{t}_1))$ является точкой глобального минимума в задаче* (EP(Φ, Q))*. Тогда $\overline{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче* (P(Q))*, доставляющий сильный минимум в задаче* (P).

Именно конкретизацией этой теоремы с применением семейства линейных функций (1.14) получено обращение ПМ — теорема 1.1.

В описанном подходе два момента представляются ключевыми — переход к использованию множества дифференцируемых L-функций и к вспомогательной концевой задаче с условиями монотонности функций $\varphi\in\Phi$ (вместо традиционной конструкции обобщенного лагранжиана задачи с помощью одной φ). В идейном плане первый момент роднит обсуждаемый подход с методом сравнения в динамике систем и его реализацией в оптимальном управлении [31], [102].

Заметим, что множество Φ должно обеспечивать достаточно хорошую локальную аппроксимацию множества $R(Q)$ в точке $\overline{b}$. Для пояснения заметим, что если

$$\overline{\Phi} = \{\varphi \in \Phi \mid \Delta\varphi(\overline{b}) = 0\} \tag{2.7}$$

— множество, соответствующее активным ограничениям-неравенствам в (2.5), то при $\overline{\Phi} = \emptyset$ теорема 2.1 может выполняться лишь в исключительном случае, когда дифференциальная связь не играет никакой роли ($\overline{b}$ является точкой локального минимума $l(b)$ при ограничениях $\varkappa(b) \le 0$, $k(b) = 0$). Отметим также, что условие экстремума в концевой задаче (ЕР(Φ,Q)) естественно интерпретировать как своеобразно заданные граничные условия для функций $\varphi \in \Phi$. В этой трактовке неравенства (и уравнение) Г–Я приобретают квазивариационный характер.

Теорема 2.1 первоначально была получена в ([28], лемма 2.1; [103]) в качестве более гибкой альтернативы теореме Кротова [34], [35]; но сколь-нибудь детальному анализу ее условия не подвергались. Лишь после работ Милютина [29], [30], который в своих канонических условиях сильного минимума использовал вместо $\Phi_-(Q)$ более узкое множество $\Phi_0(Q)$ решений уравнения Г–Я, интерес к анализу и развитию первоначальной версии условий вновь пробудился [11]–[13], [104]. Во-многом этот интерес подогревался эффектно решенными примерами с континуальным множеством точек разрыва управления на экстремали и разрешающим множеством Φ, имеющим функциональный произвол [29], [30], [105]. Примечательно, что для этих примеров "хватает" гладких L-функций. Приведем пример с последним свойством.

Пример 2.1.

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = \langle r(x), u\rangle, \quad \dot{z} = q(x,u), \quad x \in \Omega,$$
$$x_0 = x_1, \quad J = (y_1 - y_0)/(z_1 - z_0) \to \min,$$

где $u \in R^n$, $y, z \in R^1$, множество Ω открыто, $r(x)$ непрерывна, $q(x,u) > 0$ при $u \ne 0$ — сублинейная функция u.

Как видно из описания, гладкий ПМ здесь вообще не применим. Положим

$$m(x,v) = \max\{\langle v, u\rangle \mid q(x,u) \le 1\}$$

и для любой гладкой функции $g : \Omega \to R$ определим число

$$\beta(g) = \sup\{m(x, \nabla g(x) - r(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Тогда семейство гладких функций

$$\Phi = \{\varphi_g(x,y,z) \mid \varphi_g = g(x) - y - \beta(g),\ g \in C^1(\Omega),\ \beta(g) \ge 0\}$$

совпадает с $\Phi_0(Q)$ при $Q = \{x \in \Omega\}$, и для него оценка (2.6) оказывается точной — обе нижние грани совпадают с $\sup\{-\beta(g) \mid g \in C^1(\Omega)\}$. Это позволяет исследовать задачу без априорного знания какого-либо процесса, подлежащего проверке на оптимальность.

Рассмотрим возможности упрощения и обращения достаточных условий теоремы 2.1. Эти взаимосвязанные задачи требуют расширения класса допустимых L-функций до пространства $\mathrm{Lip}(Q)$ локально липшицевых функций на Q и точного описания множества достижимости.

Во-первых, теорема 2.1 остается в силе, если $\Phi = \{\varphi\}$ — множество, состоящее из одной функции $\varphi \in \mathrm{Lip}(Q)$, удовлетворяющей соответствующему неравенству Г–Я во всех точках дифференцируемости из Q (т.е. почти всюду на Q). Примечательно, однако, что такую функцию в общем случае не удается получить, отправляясь от некоторого разрешающего множества $\Phi \subset \Phi_-(Q)$, обеспечивающего выполнение условий теоремы 2.1.

Действительно, поскольку из условий $\varphi', \varphi'' \in \Phi_-(Q)$ следует, что $\varphi(t,x) = \max\{\varphi'(t,x), \varphi''(t,x)\}$ липшицева и сильно монотонна на Q, то естественно рассмотреть функцию

$$\varphi^*(t,x) = \max\{\varphi(t,x) \mid \varphi \in \Phi\},$$

если, конечно, она определена корректно. Например, это условие выполнено, если $\Phi = \{\varphi^a(t,x) \mid a \in \mathcal{A}\}$, где $\mathcal{A}$ — компактное метрическое пространство, и отображение $(a,t,x) \to \varphi^a(t,x)$ непрерывно на $\mathcal{A} \times Q$. Тогда $\varphi^* \in \mathrm{Lip}(Q)$ сильно монотонна на Q, и в принципе можно применить теорему 2.1 с одноэлементным множеством $\{\varphi^*\}$. Однако гарантировать, что оно будет разрешающим, нельзя, так как между допустимыми множествами концевых задач $\mathrm{EP}(\Phi, \mathrm{Q})$ и $\mathrm{EP}(\{\varphi^*\}, \mathrm{Q})$ получается включение $B(\Phi, Q) \subset B(\{\varphi^*\}, Q)$, которое может оказаться строгим.

Пример 2.2 ([28], [31], [103])**.** $\dot{x} = 0 \cdot u$, $|u| \le 1$, $J = x(0)x(1)$. Здесь $\Phi = \{\varphi^1 = x,\ \varphi^2 = -x\}$ — разрешающее семейство, устанавливающее глобальную оптимальность траектории $\overline{x} \equiv 0$, однако $\varphi^*(x) = |x|$ не обладает свойством разрешимости.

Тем не менее, обращение достаточных условий оптимальности с одной сильно монотонной L-функцией представляет безусловный самостоятельный интерес. Оно возможно для частных случаев задачи (P) с раздельными концевыми ограничениями при дополнительных предположениях выпуклости годографа (исключающего необходимость перехода к скользящим режимам) и компактности. Приведем один из результатов этого типа [38], [39].

Рассмотрим задачу (P_{t_0}), которая характеризуется следующими концевыми условиями: t_0 задано, $x(t_0) \in S$, $b := (t_1, x(t_1)) \in C$, где множества S, C компактны и выполнены предположения

П1) U компактно и множество $f(t,x,U)$ выпукло при $(t,x) \in Q := \{t \ge t_0\} \times R^n$;

П2) функция $f(t,x,u)$ обеспечивает условие глобального существования и продолжимости решений управляемой системы (напр., $|f(t,x,u)| \le c(1+|x|)$ на $Q \times U$).

Теорема 2.2. *Пусть $\overline{\sigma}$ — глобально оптимальный процесс в задаче* (P_{t_0}). *Тогда существует локально липшицевая функция $\varphi \in \Phi_-(Q)$, удовлетворяющая условиям*: $\varphi(t_0, x) \le 0$ *на S, и $\overline{b} = (\overline{t}_1, \overline{x}(\overline{t}_1))$ является глобальным решением задачи*

$$l(b) \to \min, \quad b \in C \cap Q, \quad \varphi(b) := \varphi(t_1, x_1) \le 0. \tag{2.8}$$

Другие варианты необходимых условий глобальной оптимальности можно получить, используя точные описания множеств достижимости с помощью липшицевого (полунепрерывного) решения уравнения Беллмана [39], [106], [107], или с помощью семейства гладких функций из $\Phi_-(Q)$ [108]. Возможности этих подходов совершенно не исследованы.

На наш взгляд, оперирование множеством L-функций приводит к нетривиальным обобщениям родственных подходов, поскольку дает возможность работать с достаточно гладкими функциями. Локально липшицевые функции, точно описывающие столь геометрически сложный объект, как множество достижимости динамической системы, должны обладать существенной патологией.

То же самое относится к классу более регулярных полувыпуклых (полувогнутых) функций [44], [109]–[111]. Как выяснилось в последние годы, именно в нем естественно искать решения неравенств и уравнений Г–Я. Заметим, что этот класс функций сложился под влиянием работ С.Н. Кружкова по обобщенным решениям уравнений в частных производных первого порядка, и в оптимальном управлении впервые был использован в [112] при обосновании методов Беллмана и Кротова.

Отметим, что при нарушении условий компактности теоремы 2.2 для обращения всех результатов с использованием L-функций требуется существенная модификация оператора $\Gamma[\varphi]$, связанная с компактификацией задачи. Примеры таких модификаций дает теория импульсного управления [104], [113]–[115].

В своем изложении мы не затрагиваем важного случая минимизирующих последовательностей. Изменения, которые следует внести в этом случае, достаточно очевидны.

2.2. *Сравнение с условиями Каратеодори и Кротова.* Нарушая хронологию, начнем с последних. Теорема Кротова ([35], с. 35) для задачи (P) в несколько усовершенствованной версии получается из теоремы 2.1, если положить $\Phi = \overline{\Phi} = \{\varphi\}$ (см. (2.7)), а концевую задачу (2.4), (2.5) заменить следующей:

$$\begin{gathered} q(b) := l(b) + \Delta\varphi(b) \to \inf, \quad \varkappa(b) \le 0, \quad k(b) = 0, \\ b \in Q \times Q, \quad \Delta\varphi(b) \le 0. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Усовершенствование состоит в том, что последнее неравенство, вытекающее из монотонности, в [35] отсутствует; оно введено в [28], [34].

Элементарно проверяется, что если существует φ, удовлетворяющая теореме Кротова, то одноэлементное множество $\Phi = \{\varphi\}$ подойдет и для теоремы 2.1. Обратное следование не имеет места, как показывают многочисленные примеры (не только из [12]). Точно также обстоит дело со всеми известными модификациями достаточных условий Кротова (см. [20], [109], [116], [117] и развернутый обзор в [34]), в том числе базирующихся и на уравнении Г–Я ([19], § 3.7).

Единственное исключение составляет, пожалуй, обобщение теоремы Кротова, предложенное В.И. Гурманом [31]. В нем, наряду с множеством $\Phi \subset \Phi_-(Q)$, вводится функционал $\omega[\Phi](b)$, неположительный на множестве $\mathrm{E}(\Phi, \mathrm{Q})$, и требуется, чтобы вектор $\overline{b}$ был решением задачи

$$G(b) := l(b) + \omega[\Phi](b) \to \inf, \quad \varkappa(b) \le 0, \quad k(b) = 0$$

при $b \in Q \times Q$ (ср. с (2.9)).

Нетрудно видеть, что эту конструкцию можно интерпретировать как некоторую реализацию метода модифицированных функций Лагранжа применительно к концевой задаче $(\mathrm{EP}(\Phi, \mathrm{Q}))$ (см. (2.4), (2.5)). В примере 2.2 достаточно взять $\Phi = \{\varphi = x\}$, $\omega = -A(\Delta\varphi(b))^2$, где $A < (-1/4)$. При $\omega = 1$, что соответствует задаче (2.9), нужный эффект отсутствует, и гладкой функции Кротова не существует.

Достаточные условия Каратеодори отличаются от обсуждаемых существенным моментом: в них $\Phi = \{\varphi\}$, причем неравенство $\Gamma[\varphi](t, x) \le 0$ должно выполняться лишь вдоль допустимых траекторий, проходящих по Q (у нас — почти всюду на Q). Будучи теоретически более слабым, это требование практически не проверяемо. Снятие дифференциальной связи при характеристике оптимального решения — принципиальный момент в наших и кротовских условиях. Часто используемые априорные оценки множеств достижимости [5], [35] — это компромисс, учитывающий сложность практического построения идеальных разрешающих L-функций. Он особенно оправдан в методах улучшения, когда оптимум (пусть локальный) еще не достигнут. Поскольку Каратеодори рассматривал классическую задачу вариационного исчисления, то говорить о какой-то концевой задаче в его подходе можно лишь в гипотетическом плане.

В этом контексте заметим, что в отечественной литературе по оптимальному управлению метод Каратеодори почти не упоминается. Исключение составляет лишь замечательная монография Иоффе и Тихомирова ([3], гл. 7). По-видимому, это объясняется труднодоступностью первоисточников — ближайшее к нам по времени переиздание [33]. (Вообще вызывает недоумение, почему фундаментальные труды Каратеодори не переводились на русский язык хотя бы выборочно.) При написании данной статьи нам тоже пришлось довериться авторитету Л. Янга ([34], гл. 1) и отрывочным сведениям из ряда других источников. Напротив, в западной литературе почти не упоминаются довольно многочисленные работы отечественных математиков по условиям кротовского типа; исключение — цикл работ

Р. Винтера и его коллег [116], [117], [108]. Однако имеется существенное различие — многие отечественные журналы с публикациями по данной проблематике являются переводными...

В современных зарубежных публикациях по обобщению методов Каратеодори и Кротова функции $\varphi \in \Phi_-(Q)$ именуются проверочными (verification functions) [19], [20], [115]. В то же время в теории инвариантности и стабилизации управляемых систем прочно закрепился термин "функция Ляпунова" (control Lyapunov function) [36], [37], [40], [41], [100], [118].

2.3. *Функции из* $\Phi_+(Q)$: *оценки функционала сверху.* Если функция φ удовлетворяет на Q неравенству $\Gamma[\varphi](t,x) \geq 0$, то следует ожидать, что она обладает следующими двумя тесно связанными свойствами:

а) слабой положительной инвариантностью замкнутых множеств надуровня

$$\mathcal{L}_c^+(\varphi) = \{(t,x) \mid \varphi(t,x) \geq c\}$$

— среди траекторий управляемой системы, стартующих из любой точки $(t_*, x_*) \in \mathcal{L}_c^+(\varphi)$, существуют "выживающие" траектории, остающиеся в $\mathcal{L}_c^+(\varphi)$ при $t \geq t_*$;

б) слабой монотонностью функции φ, которая означает выполнение неравенства $\varphi(t, x(t)) \geq \varphi(t_*, x_*)$ при $t > t_*$ вдоль "выживающих" траекторий.

Функции из $\Phi_+(Q)$ назовем слабо монотонными L-функциями управляемой системы на Q.

В динамической оптимизации свойство а) впервые появилось, по-видимому, при разработке теории позиционных дифференциальных игр ([119], гл. 5). В частности, оно существенно использовалось для построения стабильных мостов, по которым траектории могли достигать целевого терминального множества. В соответствующих конструкциях функция φ именовалась потенциалом, а цена игры оказывалась одним из потенциалов (удовлетворяющим уравнению Беллмана–Айзекса). Конечно, впоследствии эти основополагающие результаты многократно обобщались, а теория слабой инвариантности (выживаемости) вообще сформировалась в самостоятельную ветвь теории динамических систем [37], [98], [100], [101], [118]. Свойство б) слабой монотонности появилось сравнительно недавно, при довольно общих предположениях оно эквивалентно а) (см. [37], теорема 4.5).

К сожалению, известные нам результаты по обоснованию свойств а), б) предполагают выполнение для управляемой системы предположений компактности и выпуклости годографа, уже упомянутых в п. 2.1 (при нарушении последнего условия все рассмотрения можно проводить для соответствующей овыпукленной задачи с обобщенными траекториями). Это ограничивающее обстоятельство, типичное для приложений функций типа Ляпунова к разнообразным задачам теории управления, лишний раз свидетельствует об актуальности исследований задач с неограниченным множеством управлений.

Поэтому ограничимся задачей (P_{t_0}) в предположениях и обозначениях предыдущего пункта. Кроме того, пусть

$$R_S = \{(t_1, x(t_1)) \mid x(\cdot) \text{ — траектория на } [t_0, t_1], x(t_0) \in S\}$$

— множество достижимости управляемой системы из S в расширенном фазовом пространстве, т. е. интегральная воронка траектории с начальным множеством S.

Теорема 2.3. а) *Существует полувогнутая на* Q *функция* $\varphi \in \Phi_+(Q)$ *такая, что* $\varphi(t_0, x) \leq 0$ *на* S *и*

$$R_S \supseteq E(\varphi) := \{(t,x) \mid \varphi(t,x) \leq 0\}\,. \tag{2.10}$$

б) *Имеет место оценка*

$$\inf J(\Sigma(Q)) \leq \inf l(B(\varphi)), \tag{2.11}$$

где $B(\varphi)$ *— допустимое множество в конечномерной задаче* (2.8).

Поясним, что полувогнутость φ на Q означает существование такой константы $c > 0$, что функция $\varphi(t,x) - c\|(t,x)\|^2$ вогнута на Q.

Основное утверждение а) — это слегка модифицированная теорема 5 из [38]. Оценки (2.10), (2.11) становятся точными, если $\varphi \in \Phi_0(Q)$, т. е. является решением уравнения Беллмана.

2.4. *Дополнительные замечания.* Изложенные нелокальные методы двухсторонних оценок целевого функционала и соответствующие условия оптимальности дополним кратким комментарием.

1) Вообще говоря, применение описанных методов приводит к необходимости рассматривать позиционные разрывные управления, так как даже в случае гладкого решения того или иного неравенства Г–Я отображение $U^{\varphi}(t,x) = \arg\max \mathcal{H}(t,x,\varphi_x)$ (см. (1.8)) может не обладать необходимыми свойствами полунепрерывности и выпуклости. Устоявшийся в последние годы подход к определению траектории, соответствующей разрывному управлению с обратной связью, опирается на концепцию конструктивных идеальных движений — пределов подходящим образом построенных ломаных Эйлера [119]. Решения разрывных систем в смысле А.Ф. Филиппова оказались менее подходящими для задач позиционного управления.

Вопрос о построении позиционных управлений по заданному семейству L-функций не исследован.

2) С теоремой 2.1 тесно связана специальная двойственная задача улучшения нижней оценки

$$\eta(\Phi) := \inf l(B(\Phi,Q)) \to \sup, \quad \Phi \subset \Phi_-(Q), \tag{2.12}$$

а с теоремами 2.2, 2.3 — задача улучшения верхней оценки

$$\zeta(\varphi) := \inf l(B(\varphi)) \to \inf, \quad \varphi \in \Phi_+(Q). \tag{2.13}$$

В частном варианте $\Phi = \{\varphi\}$ обзор возможных подходов к задаче (2.12) дан в [34]. Численные методы решения улучшения управления в линейно-квадратичных задачах следующего раздела допускают вложение либо в схему Кротова, либо в схему использования задачи (2.12).

В полной общности задачи (2.12) и (2.13) анализу не подвергались.

3) Несмотря на высокий уровень развития теории обобщенных решений уравнений и неравенств Г–Я, конструктивные методы нахождения этих решений разработаны недостаточно. В этом направлении представляют интерес задачи выделения точных и приближенных решений достаточно простой структуры (напр., линейно-квадратичных), а также накопление полезных конструктивных приемов.

3. Вычислительные методы в классических задачах оптимального управления

3.1. *Эволюция численных методов.* К настоящему времени оформились как в результативном, так и в методическом плане основные подходы к численному решению задач оптимального управления в обыкновенных динамических системах. Существенный прогресс в проблематике вычислительных методов связан, в первую очередь, с классическими задачами без смешанных, фазовых и терминальных ограничений, которые являются характерной моделью для демонстрации и реализации разнообразных идей и принципов построения итерационных методов с целью их дальнейшего обобщения. В этих задачах фигурирует только один (целевой) функционал и присутствуют только поточечные (явные) ограничения на управление, поэтому процедуры улучшения имеют здесь однозначную направленность: построить допустимое управление с меньшим значением функционала. Разнообразие методов определяется характером используемых аппроксимаций функционала (игольчатая, фазовая, слабая вариации первого и второго порядка) и типом варьирования управлений (игольчатое, слабое, смешанное, внутреннее, комбинированное).

В первую очередь, здесь закономерно выделяются методы и алгоритмы, связанные с необходимыми условиями оптимальности. Наиболее эффективным средством для построения вычислительных процедур служит ПМ Понтрягина. Первоисточником соответствующего класса методов являются, конечно, схемы последовательных приближений из [120], [121], которые наряду с результатом [122] заложили добротную основу конструктивного использования ПМ и стимулировали развитие методов игольчатого варьирования в задачах оптимального управления. Дальнейшие исследования в этом направлении привели к своеобразной технике варьирования управлений (в окрестности конечного набора точек промежутка управления, в некоторой окрестности точки максимума по приращению функции Понтрягина, в области "максимальных" (выше среднего) значений определяющей функции, на специальных семействах множеств варьирования и др.). В полуэвристическом плане указанные способы конструирования управлений были, по-видимому, впервые сформулированы в работах [48], [49], [123]–[125] и послужили активным стимулом совершенствования теории варьирования. В результате сформировался представительный цикл работ с доказательством сходимости последовательных приближений по определенным невязкам и со свойством монотонности по функционалу.

Основополагающий вклад в развитие методов ПМ внесли исследования Ф.Л. Черноусько и его учеников [46], [47], [126]. Например, можно подчеркнуть, что в известной монографии [46] приведено семь модификаций метода последовательных приближений для задачи оптимального управления со свободным правым концом в системе (1.1), каждая из которых характеризуется тем или иным своеобразием.

Представляется также уместным выделить популярный вариант игольчатого варьирования, который был предложен О.В. Васильевым и связан с так называемым определяющим неравенством интегрального типа [50], [127], [128].

Приведенные разработки явились заметным достижением в области вычислительных методов оптимального управления. В результате сложился комплекс алгоритмов игольчатого варьирования с единой операцией поиска вспомогательного управления из условия максимума функции Понтрягина или ее модификаций. Определенный итог этому направлению исследований подведен в монографии В.А. Срочко [53], где обоснован оптимальный (по принципу наискорейшего спуска) способ варьирования управлений в методах игольчатой линеаризации.

Базовым результатом при построении методов удачно послужило хорошо известное следствие теоремы А.А. Ляпунова, которое уже неоднократно сыграло свою положительную роль в проблемах оптимального управления. Соответствующее утверждение имеет вид.

Лемма 3.1. *Пусть* $p \in L^m_\infty(T)$. *Тогда для любого* $\alpha \in (0,1)$ *найдется такое измеримое подмножество* $T_\alpha \subset T$ *с мерой* $\operatorname{mes} T_\alpha = \alpha(t_1 - t_0)$, *что*

$$\int_{T_\alpha} p(t)dt = \alpha \int_T p(t)dt.$$

Это элегантное соотношение, кроме всего прочего, явилось эффективным средством для обоснования свойств улучшения процедур игольчатого варьирования.

Одним из характерных результатов является, например, следующий метод игольчатой линеаризации, обладающий оптимальным свойством в рамках наискорейшего спуска относительно множеств варьирования заданной меры.

Следуя [53], наметим вычислительную схему метода для основной задачи оптимального управления классического типа

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min,$$
$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U, \quad t \in T = [t_0, t_1] :$$

1) исходные данные $u(t)$, $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$;

2) максимизирующее управление

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{v \in U} H(\psi(t), x(t), v, t),$$

функция переключения

$$g(t) = \Delta_{\overline{u}(t)} H(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

с крайними значениями

$$\lambda_{\min} = \inf\{g(t),\ t \in T\}, \quad \lambda_{\max} = \sup\{g(t),\ t \in T\};$$

3) процедура варьирования

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} u(t), & g(t) \le \lambda, \\ \overline{u}(t), & g(t) > \lambda; \end{cases}$$

4) итерационный поиск параметра λ с ориентировкой на решение задачи

$$\Phi(u_\lambda) \to \min, \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}].$$

Следующую представительную группу методов численного решения составляют градиентные процедуры оптимального управления, имеющие в своей основе следствия ПМ (классические вариации функционалов, дифференциальный ПМ, условия стационарности гамильтониана) и использующие разноплановые варианты слабого варьирования управлений. Спектр задач, методов и технологий реализации в этой области необыкновенно широк, что образует богатую и пеструю картину градиентного многообразия. На этом фоне выделим в качестве классических уже указанные монографии Р.П. Федоренко [55] и Ф.П. Васильева [5], в рамках которых сведущий читатель вполне удовлетворит свои исторические и ностальгические интересы.

Для классических задач оптимального управления наряду с традиционными методами ПМ и градиентными схемами в последнее время разработан целый комплекс процедур улучшения и соответствующих итерационных методов, использующих нестандартные (в сравнении с классической техникой) аппроксимации функционалов вместе с конструктивной технологией варьирования [53], [129]–[133].

Общие характеристики развиваемого подхода состоят в следующем:

— в качестве базовой основы для построения методов используются неклассические аппроксимации целевого функционала (квазивариации), которые определены на паре допустимых процессов (два управления, две фазовые траектории) и обеспечивают более высокий порядок точности, чем стандартная вариация функционала;

— в билинейных и билинейно-квадратичных задачах построенные аппроксимации являются точными (нелокальными), поэтому соответствующие процедуры и методы улучшения работают без варьирования управлений (без параметрического поиска), что является существенным фактором в плане вычислительных затрат;

— нестандартным элементом процедур варьирования является конструктивное использование специальных функций (вместо параметров), которые существенно расширяют потенциал и повышают эффективность варьирования;

— реализация ряда процедур и методов улучшения связана с интегрированием разрывных по фазовым переменным систем управления, что является положительным фактором в плане возможного улучшения экстремальных режимов в невыпуклых задачах.

В качестве характерной иллюстрации отметим, например, процедуру смешанного варьирования, которая сочетает в себе участки слабого и игольчатого варьирования [133].

Образуется функция переключения

$$g(t) = \langle H_u[t,u], \overline{u}(t) - u(t) \rangle\,, \quad t \in T,$$

с максимизирующим управлением $\overline{u}(t)$. Схема варьирования для $\lambda > 0$ представляется в виде

$$u(t,\lambda) = \begin{cases} u(t) + \frac{g(t)}{\lambda}(\overline{u}(t) - u(t)), & g(t) < \lambda; \\ \overline{u}(t), & g(t) \geq \lambda. \end{cases}$$

Такое варьирование вполне уместно в задачах, когда оптимальное управление содержит внутренние и граничные участки относительно множества U. Отметим, что данная процедура варьирования получена в результате решения специальной экстремальной задачи и не является продуктом эвристического творчества.

Очередная группа методов численного решения классических задач в той или иной мере связана с конструкциями и соотношениями условий оптимальности в формате В.Ф. Кротова, В.И. Гурмана. В этой области методы строятся по принципу сильного и слабого улучшения в первом и втором порядке. При этом порядок метода определяется характером аппроксимации разрешающей функции (линейная аппроксимация определяет первый порядок, квадратичная аппроксимация — второй порядок). Существенным фактором для обеспечения свойства улучшения основного функционала является систематическое использование стандартной выпуклой комбинации основного и вспомогательного функционалов. Для решения краевой задачи ПМ такого сорта комбинации (линейные гомотопии) использованы в [134]. Если в качестве вспомогательного функционала выбрать среднеквадратичное отклонение по управлению, то речь пойдет о слабом улучшении. В противном случае, если использовать среднеквадратичную невязку по фазовым траекториям, то приходим к процедурам сильного улучшения.

Как взаимодействие разноплановых процедур улучшения из [53], [59] интересно отметить, что максимизирующие управления в первоначальном варианте вырабатываются в позиционной форме (как функции фазовых переменных) с последующей прогонкой через фазовые либо сопряженные системы. При этом, однако, в [53] желательно приоритетными являются разрывные системы (с учетом возможного свойства улучшения), в то время как в [59] предпочтение отдается гладким уравнениям (дополнительное предположение).

Основополагающие работы данного направления уже выделены [31], [35], [59]. Остается освежить читателя обзорной работой [135].

Задача быстродействия занимает особое место в теории оптимального управления. На протяжении многих лет эта проблема как в качественном, так и в численном плане является объектом устойчивого интереса исследователей. Обзорное внимание к этой своеобразной задаче поддержано, например, в [44], [109]–[111], [136].

Наконец, следует отметить конструктивные результаты по выбору вариации спуска в задачах оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями. Не вызывает сомнения нетривиальная вычислительная трудоемкость указанных задач, поэтому даже скромные достижения в решении таких "монстров" заслуживают самого серьезного внимания [26], [27].

Авторы уже отмечали возрастающую роль и актуальность проблемы глобального поиска в невыпуклых задачах оптимального управления. Определенным катализатором такого сорта исследований может служить монография [137].

В рамках инновационных направлений развития современной теории управления необходимо отметить ту революционную исследовательскую работу, которая на протяжении целого ряда лет успешно проводится под руководством Р. Габасова и Ф.М. Кирилловой.

Основная идея развиваемого подхода к проблеме построения оптимального синтеза предполагает вычисление обратных связей по ходу каждого конкретного процесса управления, что означает оптимальное управление в режиме реального времени. Оказалось, что при оптимальном управлении в этом режиме решающую роль играют двойственные методы, адекватно учитывающие динамическую природу задачи. Трудно даже перечислить те результаты, которые получены на этом пути: реализация классической обратной связи; исследование ситуации, когда математическая модель является недетерминированной; анализ задач с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями; изучение разнообразных типов регуляторов и др. Обобщения на нелинейные задачи можно найти в [138], [139].

В пунктах 3.2–3.5 авторы посчитали целесообразным рассмотреть в рамках единой схемы линейные и квадратичные по фазовому состоянию задачи оптимального управления со скромной надеждой продемонстрировать свойства, показатели и характеристики, которыми должны, как минимум, обладать достойные методы численного решения указанных классов задач.

Основой для разработки итерационных методов и соответствующих условий оптимальности служат нелокальные (без остаточных членов) формулы приращения функционалов. В результате построенные процедуры улучшения также приобретают нелокальный характер, т. е. не требуют параметрического поиска (варьирования управлений) на каждой итерации. Рассматриваемые методы работают в классе максимизирующих управлений относительно функции Понтрягина для смешанной совокупности траекторий (фазовая и сопряженная траектории отвечают разным управлениям), что отличается от стандартов ПМ и придает процедурам дополнительную эффективность.

Для повышения качества методов проводится итеративная регуляризация целевого функционала (дополнение невязками отклонений от номинальных объектов). В результате получаются условия оптимальности, усиливающие ПМ в рассматриваемом классе задач. При этом методы приобретают нетривиальное свойство улучшения управлений, удовлетворяющих ПМ, что открывает перспективу оптимального поиска в невыпуклых задачах.

В пункте 3.5 в качестве альтернативы демонстрируется нелокальный метод на основе операции проектирования в классе кусочно-гладких управлений, что часто оказывается достаточно практичным и необходимым.

3.2. *Линейная задача оптимального управления.* Рассмотрим задачу (P_1) оптимизации линейной по состоянию динамической системы

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{3.1}$$

на множестве допустимых управлений

$$V = \{u \in PC(T) \mid u(t) \in U,\ t \in T\} \tag{3.2}$$

по линейному критерию качества

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_T (b_0(u,t) + \langle a(u,t), x\rangle)\, dt \to \min.$$

Отметим, что класс допустимых управлений образуют кусочно-непрерывные вектор-функции $u(t)$, $t \in T$, с ограничением $u(t) \in U$, где $U \subset R^r$ — компактное множество.

Основу построения итерационных методов составляют два специальных представления для приращения функционала $\Phi(u)$.

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, A(u,t)x + b(u,t) \rangle - b_0(u,t) - \langle a(u,t), x \rangle$$

и сопряженную систему

$$\dot{\psi} = -A(u,t)^T \psi + a(u,t), \quad \psi(t_1) = -c.$$

Пусть $u, v \in V$ — допустимые управления, $x(t,u)$, $x(t,v)$ — соответствующие фазовые траектории, $\psi(t,u)$, $\psi(t,v)$ — решения сопряженной системы.

Формулы приращения функционала Φ на паре u, v имеют вид [53]

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), u(t), t) dt, \tag{3.3}$$

$$\Delta_v \Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t,v), x(t,u), u(t), t) dt. \tag{3.4}$$

Здесь $\Delta_v \Phi(u) = \Phi(v) - \Phi(u)$, $\Delta_v H(\psi, x, u, t) = H(\psi, x, v, t) - H(\psi, x, u, t)$.

Введем отображение $u^*(\psi, x, t)$ с помощью экстремального соотношения

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{u \in U} H(\psi, x, u, t), \quad \psi, x \in R^n, \quad t \in T, \tag{3.5}$$

и предположим, что формула (3.5) определяет вектор-функцию $u^*(\psi, x, t)$, которая является кусочно-непрерывной на $R^n \times R^n \times T$.

Принцип максимума в задаче (P_1) для управления $u(t)$ представляется в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t,u), x(t,u), t), \quad t \in T,$$

и не является достаточным условием оптимальности.

Поставим задачу улучшения управления $u \in V$: найти управление $v \in V$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \leq 0$. Опишем механизм улучшения на основе формул (3.3), (3.4).

Первая процедура улучшения:

1) по данному управлению $u \in V$ найдем сопряженную траекторию $\psi(t,u)$, $t \in T$;

2) сформируем максимизирующее управление

$$v^*(x,t) = u^*(\psi(t,u), x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $x(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x} = A(v^*(x,t), t)x + b(v^*(x,t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(x(t), t)$, $t \in T$.

Вторая процедура улучшения:

1) по данному управлению $u \in V$ найдем фазовую траекторию $x(t,u)$, $t \in T$;

2) сформируем максимизирующее управление

$$v^*(\psi, t) = u^*(\psi, x(t,u), t), \quad \psi \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(v^*(\psi,t), t)^T \psi + a(v^*(\psi,t), t), \quad \psi(t_1) = -c$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(\psi(t), t)$, $t \in T$.

Отметим, что обе процедуры вырабатывают на выходе процессы $(v(t), x(t))$, $(v(t), \psi(t))$ со свойством улучшения по управлению $\Phi(v) \leq \Phi(u)$. Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$, означает, что исходное управление $u(t)$ удовлетворяет ПМ. Трудоемкость реализации каждой процедуры (цена улучшения) — две задачи Коши (для сопряженной и фазовой систем). Первая процедура улучшения была анонсирована в работах [140], [141].

Следует подчеркнуть незаурядную возможность улучшения экстремальных управлений в рамках описанных процедур.

Пример 3.1.

$$\Phi(u) = -x(2) + 2\int_0^2 x(2-3u)\,dt \to \min,$$
$$\dot{x} = 2(u-1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0,1], \quad t \in T.$$

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ 0, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что оно строго удовлетворяет ПМ. Реализация первой процедуры приводит к следующим результатам. На выходе получаем три управления, вследствие неединственности решения разрывной x-системы в п. 3):

а) $v_1(t) = u(t)$, $t \in T$, — это значит, что исходное управление удовлетворяет ПМ;

б) $v_2(t) = 1$, $t \in T$, — это улучшающее управление: $\Phi(v_2) < \Phi(u)$;

в) $v_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ \frac{7-2t}{6t}, & 1 < t \le 2, \end{cases}$ — это допустимое управление с особым участком $(1,2]$, которое равносильно исходному: $\Phi(v_3) = \Phi(u)$.

Представленные процедуры можно естественным образом состыковать и получить метод приращений (в основе — две формулы приращения), который в пределах той же трудоемкости обеспечивает двойное улучшение по функционалу (цена каждого улучшения — одна задача Коши). Проведем описание метода в итерационной форме.

Пусть на k-й итерации имеется допустимый процесс $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$, $k = 0,1,\ldots$ Найдем решение $\psi^k(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A(u^*(\psi, x^k(t), t), t)^T \psi + a(u^*(\psi, x^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -c$$

в совокупности с управлением

$$v^k(t) = u^*(\psi^k(t), x^k(t), t), \quad t \in T.$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = A(u^*(\psi^k(t), x, t), t)x + b(u^*(\psi^k(t), x, t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

в совокупности с управлением

$$u^{k+1}(t) = u^*(\psi^k(t), x^{k+1}(t), t), \quad t \in T.$$

В итоге получаем допустимый процесс $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, $t \in T$. Итерация закончена.

Прокомментируем метод. Промежуточное управление v^k получено на основе u^k как результат второй процедуры улучшения. Переход $v^k \to u^{k+1}$ есть реализация первой процедуры. Таким образом, в процессе итерации метода происходит двойное улучшение по функционалу

$$\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k),$$

причем каждое улучшение дается ценой решения одной задачи Коши.

Представленный метод является ведущей процедурой в рамках эффективного решения линейных задач.

3.3. *Квадратичная задача оптимального управления.* Рассмотрим *задачу* (P_2) на минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \int_T \left(b_0(u,t) + \langle a(u,t), x\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Q(u,t)x\rangle \right) dt$$

относительно линейной системы (3.1) в классе допустимых управлений (3.2).

Введем обозначения: $\varphi(x(t_1))$ — терминальная часть функционала, $f_0(x,u,t)$ — подинтегральная часть функционала, $f(x,u,t)$ — правая часть системы (3.1). Образуем функцию Понтрягина в задаче (P_2)

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - f_0(x,u,t).$$

Пусть $u(t)$, $v(t)$, $t \in T$, — допустимые управления, $x(t,u)$, $x(t,v)$ — соответствующие фазовые траектории.

Определим вектор-функцию $\psi(t,u)$, $t \in T$, как решение первой сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x(t,u), u(t), t), \quad \psi(t_1) = -\nabla\varphi(x(t_1,u)). \tag{3.6}$$

Введем $n \times n$-симметричную матричную функцию $\Psi(t,u)$, $t \in T$, с помощью уравнения (вторая сопряженная система)

$$\dot{\Psi} = -A(u(t),t)^T\Psi - \Psi A(u(t),t) + Q(u(t),t), \quad \Psi(t_1) = -\nabla^2\varphi(x(t_1,u)). \tag{3.7}$$

Образуем вспомогательную вектор-функцию

$$p(t,u,x) = \psi(t,u) + \Psi(t,u)(x - x(t,u)), \quad x \in R^n.$$

Формулы приращения функционала $\Phi(u)$ в задаче (P_2) имеют вид [53]

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,u,x(t,v)), x(t,v), u(t), t)\, dt, \tag{3.8}$$

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int_T \Delta_{v(t)} H(p(t,v,x(t,u)), x(t,u), u(t), t)\, dt. \tag{3.9}$$

При этом вектор-функция $p(t,v,x(t,u))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{p} = -H_x(p, x(t,u), v(t), t) - \Psi(t,v)\Delta_{v(t)} f(x(t,u), u(t), t), \quad p(t_1) = -\nabla\varphi(x(t_1,u)).$$

Представленные формулы (3.8), (3.9) являются обобщением аналогичных соотношений (3.3), (3.4) для линейной задачи (P_1) и открывают возможность нелокального спуска для управления $u(t)$ с помощью операции (3.5) на максимум функции Понтрягина.

Отличительной особенностью формул (3.8), (3.9) является присутствие матричной функции $\Psi(t)$, которая традиционно используется для исследования особых управлений [142], как необходимый элемент соответствующих условий оптимальности.

Первая процедура улучшения:

1) по допустимой паре $(u(t), x(t,u))$, $t \in T$, найдем решение $\psi(t,u)$, $\Psi(t,u)$ сопряженных систем (3.6), (3.7);

2) образуем вектор-функцию

$$p(t,u,x) = \psi(t,u) + \Psi(t,u)(x - x(t,u))$$

и сформируем максимизирующее управление

$$v^*(x,t) = u^*(p(t,u,x), x, t), \quad x \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $x(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^*(x,t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $v(t) = v^*(x(t),t)$, $t \in T$.

На выходе получаем допустимую пару $(v(t), x(t,v))$, $t \in T$. Равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$, означает, что исходное управление удовлетворяет ПМ. Отметим трудоемкость реализации процедуры — две векторные задачи Коши $(\psi(t,u), x(t,v))$ и одна матричная задача Коши $(\Psi(t,u))$.

Опишем “двойственную” схему улучшения на основе формулы приращения (3.9).

Вторая процедура улучшения:

1) по управлению $u \in V$ найдем решение $x(t,u)$ фазовой системы;

2) сформируем максимизирующее управление

$$v^*(p,t) = u^*(p, x(t,u), t), \quad p \in R^n, \quad t \in T;$$

3) найдем решение $p(t), \Psi(t)$ комбинированной сопряженной системы для $v^* = v^*(p,t)$

$$\dot p = -H_x(p, x(t,u), v^*, t) - \Psi \Delta_{v^*} f(x(t,u), u(t), t),$$
$$\dot\Psi = -A(v^*,t)^T \Psi - \Psi A(v^*,t) + Q(v^*,t),$$
$$p(t_1) = -\nabla\varphi(x(t_1,u)), \quad \Psi(t_1) = -\nabla^2\varphi(x(t_1,u))$$

и вычислим управление $v(t) = v^*(p(t),t)$, $t \in T$.

Переход $u \Rightarrow v$ с условием $\Delta_v \Phi(u) \le 0$ завершен. Трудоемкость реализации второй процедуры аналогична первой.

Продемонстрируем эффект улучшения экстремального управления с помощью первой процедуры.

Пример 3.2.

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u x^2 dt \to \min,$$
$$\dot x = u, \quad x(0) = 0, \quad |u| \le 1.$$

Определим основные конструкции

$$H = \psi u - \frac{1}{2} u x^2, \quad u^* = \operatorname{sign}(\psi - \frac{1}{2}x^2),$$
$$\dot\psi = xu, \quad \psi(1) = 0, \quad \dot\Psi = u, \quad \Psi(1) = 0.$$

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями

$$x(t,u) = 0, \quad \psi(t,u) = 0, \quad \Psi(t,u) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Оно является особым на $[0,1]$: $H_u(\psi(t,u), x(t,u)) = 0$, т. е. удовлетворяет ПМ с вырождением. Применяя первую процедуру, получаем фазовое уравнение

$$\dot x = \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x(0) = 0.$$

Оно имеет особое решение $x(t) = 0$ с порождающим управлением $u(t) = 0$.

Кроме того, уравнение имеет неособое решение $x(t) = -t$, соответствующее управлению $v(t) = -1$, которое обеспечивает свойство улучшения: $\Delta_v \Phi(u) < 0$.

По аналогии с задачей (P_1) объединим представленные процедуры в метод приращений, который при тех же вычислительных затратах обеспечивает двойное улучшение по функционалу. Проведем описание метода в итерационной форме.

Пусть на k-м шаге имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$. Найдем решение $p^k(t)$, $\Psi^k(t)$ векторно-матричной задачи Коши при $u^* = u^*(p, x^k(t), t)$

$$\dot p = -H_x(p, x^k(t), u^*, t) - \Psi \Delta_{u^*} f(x^k(t), u^k(t), t),$$
$$\dot\Psi = -A(u^*,t)^T \Psi - \Psi A(u^*,t) + Q(u^*,t),$$

$$p(t_1) = -\nabla\varphi(x^k(t_1)), \quad \Psi(t_1) = -\nabla^2\varphi(x^k(t_1))$$

и обозначим управление $v^k(t) = u^*(p^k(t), x^k(t), t)$, $t \in T$.

Образуем вектор-функцию

$$p^k(x,t) = p^k(t) + \Psi^k(t)(x - x^k(t)),$$

найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u^*(p^k(x,t), x, t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

и сформируем управление $u^{k+1}(t) = u^*(p^k(x,t), x, t)$ при $x = x^{k+1}(t)$.

В итоге получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, $t \in T$. Итерация закончена.

Отметим, что в ходе итерации метода происходит двойное улучшение по функционалу: $\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k)$. Трудоемкость реализации — две векторные и одна матричная задачи Коши.

Пусть в задаче (P_2) матричные функции $A(u,t)$, $Q(u,t)$ в системе и функционале не зависят от управления: $A(u,t) = A(t)$, $Q(u,t) = Q(t)$ (стандартная квадратичная задача). Тогда матричная функция $\Psi(t,u)$ также теряет эту зависимость $\Psi(t,u) = \Psi(t)$. Это значит, что в методе приращений матричная задача Коши решается только один раз (до итерационной процедуры), что существенно экономит вычислительные затраты на реализацию метода.

3.4. *Квадратичная задача. Фазовая регуляризация.* Слабым местом представленных выше процедур является возможность стабилизации (отсутствие улучшения) на управлениях, не удовлетворяющих ПМ. Как следствие, остается открытым вопрос о сходимости соответствующих методов даже на уровне выпуклых квадратичных задач.

Для преодоления указанных недостатков в [53] проводится фазовая регуляризация целевого функционала в задаче (P_2) с последующим применением стандартной схемы исследования. В результате появляется оценка уменьшения функционала, что позволяет получить нелокальные условия оптимальности, дополняющие и усиливающие ПМ в рассматриваемом классе задач. При этом улучшается любое управление, не удовлетворяющее ПМ. Кроме того, обеспечивается сходимость соответствующих итерационных методов в общих и выпуклых квадратичных задачах.

Пусть $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$, — допустимая пара в задаче (P_2). Введем вспомогательный функционал

$$\Phi_\alpha(u, u^k) = \Phi(u) + \alpha J(u, u^k), \quad \alpha \ge 0,$$

где $J(u,u^k)$ — среднеквадратичное фазовое отклонение

$$J(u,u^k) = \frac{1}{2}\left(\|x(t_1,u) - x^k(t_1)\|^2 + \int_T \|x(t,u) - x^k(t)\|^2 dt\right).$$

Функционал $\Phi_\alpha(u,u^k)$ определяет обычную процедуру регуляризации в экстремальных задачах [56]. Для задач оптимального управления подобная структура регуляризации использовалась, например, в [59] как средство обеспечения локальности варьирования.

Поставим задачу улучшения управления u^k по функционалу Φ_α для заданного $\alpha > 0$: найти управление $u^{k+1} \in V$ с условием $\Phi_\alpha(u^{k+1}, u^k) \le \Phi_\alpha(u^k, u^k)$. При этом управление u^{k+1} обеспечивает уменьшение функционала Φ с оценкой

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \le -\alpha J(u^{k+1}, u^k). \tag{3.10}$$

Отметим, что функционал Φ_α сохраняет свойство квадратичности исходного функционала, поэтому для построения процедур улучшения можно непосредственно использовать предыдущие результаты.

Сформулируем метод последовательных приближений (M_1) на основе первой процедуры улучшения в задаче (P_2) с функционалом Φ_α. Зафиксируем параметр $\alpha > 0$. Пусть $k = 0, 1, \ldots$, $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$, — допустимая пара в задаче (P_2). Найдем решение $\psi^k(t)$, $\Psi^k_\alpha(t)$ сопряженных систем

$$\dot{\psi} = -A(u^k,t)^T\psi + a(u^k,t) + Q(u^k,t)x^k(t), \quad \psi(t_1) = -\nabla\varphi(x^k(t_1)),$$
$$\dot{\Psi} = -A(u^k,t)^T\Psi - \Psi A(u^k,t) + Q(u^k,t) + \alpha E, \quad \Psi(t_1) = -D - \alpha E,$$

и образуем вектор-функцию

$$p^k_\alpha(t,u^k,x) = \psi^k(t) + \Psi^k_\alpha(t)(x - x^k(t)).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v^k(x,t,\alpha), t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{3.11}$$

с максимизирующим управлением

$$v^k(x,t,\alpha) = u^*(p^k_\alpha(t,u^k,x), x, t).$$

Выделим управление $u^{k+1}(t) = v^k(x^{k+1}(t), t, \alpha)$. В результате получаем допустимую пару $(u^{k+1}(t), x^{k+1}(t))$, $t \in T$, что и завершает итерацию метода.

Оценка уменьшения функционала представляется неравенством (3.10). Величина $\delta_k = \Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})$ является невязкой ПМ для управления u^k: если $\delta_k = 0$, то u^k удовлетворяет ПМ. Поскольку функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на V (множество U ограничено), то имеет место сходимость метода по невязке ПМ: $\delta_k \to 0$, $k \to \infty$.

Усиленный вариант сходимости (по невязке оптимальности) реализуется для выпуклых задач, которые выделяются из (P_2) следующими условиями:

$$a(u,t) = a(t), \quad Q(u,t) = Q(t), \quad A(u,t) = A(t),$$
$$D \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad t \in T$$

(переменные x, u разделены, матрицы квадратичных форм неотрицательно определены).

Теорема 3.1. *В выпуклой задаче метод* (M_1) *для любого* $\alpha > 0$ *порождает минимизирующую последовательность управлений.*

Сформулируем условия оптимальности для управления u^k в рамках процедуры последовательного улучшения (M_1).

Принцип максимума. Для оптимальности управления $u^k(t)$ в задаче (P_2) необходимо, чтобы траектория $x^k(t)$ была решением задачи Коши (3.11) хотя бы для одного $\alpha \geq 0$.

Условие (A_1). Для оптимальности управления $u^k(t)$ в задаче (P_2) необходимо, чтобы траектория $x^k(t)$ была единственным решением задачи Коши (3.11) для всех $\alpha > 0$.

Понятно, что ПМ является следствием условия (A_1). Это значит, что метод (M_1) может улучшать управления, удовлетворяющие ПМ. Такое благоприятное свойство реализуется через возможную неединственность решения системы (3.11), которая в свою очередь связана с попаданием фазовой траектории на многообразие разрыва правой части (поверхность переключения управления). При этом отметим, что решение системы (3.11), проходящее по поверхности разрыва (особое решение), определяется на основе дифференцирования по времени функции переключения (правило эквивалентного управления [143]).

Вполне аналогично в рамках второй процедуры улучшения для функционала Φ_α можно построить альтернативный метод (M_2) с условием оптимальности (A_2) [53].

3.5. *Линейно-квадратичная задача. Метод проекций.* Рассмотрим квадратичную задачу (P_2) при условии линейности по управлению целевого функционала и фазовой системы (*ЛК-задача*). Дополнительно предположим, что U — выпуклое замкнутое множество.

В данном случае функция Понтрягина имеет следующую структуру:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_u(\psi, x, t), u\rangle\,,$$

поэтому $\Delta_v H(\psi, x, u, t) = \langle H_u(\psi, x, t), v - u\rangle$. Формулы приращения функционала Φ представляются в виде (3.8), (3.9) с соответствующим изменением интегрантов.

Пусть P_U — оператор проектирования на множество U в евклидовой норме. Предположим, что задача проектирования решается аналитически. Проведем описание метода в итерационной форме.

Зафиксируем параметр $\alpha > 0$. Пусть на k-й итерации имеется допустимая пара $(u^k(t), x^k(t))$, $t \in T$. Образуем проекционное управление

$$\overline{u}^k(p, t) = P_U(u^k(t) + \alpha H_u(p, x^k(t), t)).$$

Найдем решение $p^k(t)$, $\Psi^k(t)$ векторно-матричной системы для $\overline{u} = \overline{u}^k(p, t)$

$$\dot{p} = -H_x(p, x^k(t), \overline{u}, t) - \Psi f_u((x^k(t), t)(\overline{u} - u^k(t))),$$
$$\dot{\Psi} = -A(\overline{u}, t)^T \Psi - \Psi A(\overline{u}, t) + Q(\overline{u}, t),$$
$$p(t_1) = -\nabla\varphi(x^k(t_1)), \quad \Psi(t_1) = -D,$$

и обозначим промежуточное управление $v^k(t) = \overline{u}^k(p^k(t), t)$, $t \in T$. Сформируем вектор-функцию

$$q^k(x, t) = p^k(t) + \Psi^k(t)(x - x^k(t))$$

и проекционное управление

$$\overline{v}^k(x, t) = P_U(v^k(t) + \alpha H_u(q^k(x, t), x, t)).$$

Найдем решение $x^{k+1}(t)$, $t \in T$, фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, \overline{v}^k(x, t), t), \quad x(t_0) = x^0$$

и выделим соответствующее управление $u^{k+1}(t) = \overline{v}^k(x^{k+1}(t), t)$, $t \in T$. Итерация закончена.

Отметим, что в процессе итерации происходит двойной спуск по функционалу:

$$\Phi(u^{k+1}) \le \Phi(v^k) \le \Phi(u^k).$$

Рассмотрим вопрос о сходимости метода. Введем неотрицательную величину $\delta(u^k) = \Phi(u^k) - \Phi(v^k)$. Это невязка ПМ для управления u^k.

Теорема 3.2. *Пусть в ЛК-задаче функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на множестве V. Тогда метод проекций обладает свойством сходимости по невязке ПМ: $\delta(u^k) \to 0$, $k \to \infty$.*

Сформулируем второе утверждение о сходимости.

Теорема 3.3. *Пусть в выпуклой ЛК-задаче множество U ограничено. Тогда метод проекций для любого $\alpha > 0$ порождает минимизирующую последовательность.*

Подведем итог. Представленный метод проекций имеет нелокальный характер (отсутствие параметрического поиска), не связан с разрывными системами (оператор проектирования удовлетворяет условию Липшица), улучшает любое управление, не удовлетворяющее ПМ, и порождает минимизирующую последовательность управлений в выпуклой задаче. С другой стороны, метод проекций не обладает свойством улучшения управлений, удовлетворяющих ПМ.

4. Вариационный принцип максимума в задачах оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболических систем

4.1. *Оптимизация гиперболических систем с управляемыми дифференциальными связями на границе.* Рассмотрим задачу оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений, в которой граничные условия определяются из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi; \tag{4.1}$$

$$x(s,t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \tag{4.2}$$

$$x^-(s_1,t) = q(t), \quad t \in T, \tag{4.3}$$

$$x_t^+(s_0,t) = g(x^+(s_0,t), u(t), t), \quad t \in T,$$

$$x^+(s_0,t_0) = \big(x^0(s_0)\big)^+, \tag{4.4}$$

$$u(t) \in U \subset E^r, \quad t \in T, \quad U \text{ — компакт}; \tag{4.5}$$

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_1),s)ds + \iint_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt \to \min. \tag{4.6}$$

Здесь $\Pi = (s_0,s_1)\times(t_0,t_1)$ — прямоугольник, $S=[s_0,s_1]$, $T=[t_0,t_1]$, $x(s,t)=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ — вектор-функция состояния, $u(t)=(u_1,u_2,\dots,u_r)$ — вектор-функция управления из класса ограниченных и измеримых на T функций, $A(s,t)$ — диагональная матрица размерности $n\times n$, элементы которой знакопостоянны в $\overline{\Pi} = S\times T$: $a_i(s,t)>0$, $i=1,2,\dots,m_1$; $a_i(s,t)=0$, $i=m_1+1,m_1+2,\dots,m_2$; $a_i(s,t)<0$, $i=m_2+1,m_2+2,\dots,n$; из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A составлены две диагональные подматрицы $A^+(s,t)$ размерности $m_1\times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n-m_2)\times(n-m_2)$; $x^+=(x_1,x_2,\dots,x_{m_1})$, $x^-=(x_{m_2+1},x_{m_2+2},\dots,x_n)$.

Вводится понятие характеристик $s^{(i)}=s^{(i)}(\xi,\tau;t)$, определяемых из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{ds}{dt} = a_i(s,t), \quad i=1,2,\dots,n; \quad s(\tau)=\xi.$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (4.1)–(4.4) понимается функция, удовлетворяющая системе интегральных уравнений, в которой интегрирование осуществляется вдоль характеристик исходной гиперболической системы (4.1):

$$x_i(s,t) = x_i(\xi^{(i)}(s,t),\tau^{(i)}(s,t)) + \int_{\tau^{(i)}(s,t)}^{t} f_i(x(\xi,\tau),\xi,\tau)\big|_{\xi=s^{(i)}(s,t;\tau)}d\tau$$
$$(s,t)\in\Pi; \quad i=1,2,\dots,n.$$

Здесь $(\xi^{(i)}(s,t),\tau^{(i)}(s,t))$ — начальная точка i-й характеристики, проходящей через точку (s,t).

Ставший уже классическим метод приращений Л.И. Розоноэра [144] позволяет получить в рассматриваемой задаче необходимое условие оптимальности типа ПМ Понтрягина. При доказательстве существенна локальность формулы приращения — остаточные члены оцениваются через величину, характеризующую малость меры области игольчатого варьирования управления. Для двух частных случаев рассматриваемой задачи в ходе дальнейшего изложения будут получены нестандартные точные (без остаточных членов) формулы приращения.

Начнем с классического варианта формулы приращения на двух допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\widetilde{u} = u + \Delta u,\ \widetilde{x} = x + \Delta x\}$. Обозначим $\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u)$. Очевидно,

$$\Delta J(u) = \int_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)ds + \iint_\Pi \Delta F(x,s,t)ds\,dt.$$

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,s,t) = \langle \psi(s,t), f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$
$$h(p,x^+,u,t) = \langle p(t), g(x^+(s_0,t),u(t),t)\rangle.$$

После достаточно стандартных операций получим формулу приращения в виде

$$\Delta J(u) = -\int_T \Delta_{\widetilde{u}} h(p(t),x^+(s_0,t),u(t),t)\,dt + \eta, \tag{4.7}$$

где

$$\eta = \int_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)ds - \int_T [o_h(\|\Delta x^+(s_0,t)\|) +$$
$$+ \langle \Delta_{\widetilde{u}} h_{x^+}(p(t),x^+(s_0,t),u(t),t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle]dt - \iint_\Pi o_H(\|\Delta x(s,t)\|)ds\,dt. \tag{4.8}$$

Здесь вектор-функции $\psi(s,t)$ и $p(t)$ являются решениями следующей сопряженной задачи (условие стационарности функции Лагранжа по состоянию):

$$\begin{gathered}\psi_t + (A(s,t)\psi)_s = -H_x(\psi,x,s,t), \quad (s,t)\in\Pi,\\ \psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s), \quad s\in S,\\ \psi^-(s_0,t)=0, \quad \psi^+(s_1,t)=0, \quad t\in T;\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered}\dot p = -h_x(p,x^+(s_0,t),u,t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t\in T,\\ p(t_1)=0,\end{gathered} \tag{4.10}$$

o_φ, o_h, o_H — остатки от разложений соответственно приращений

$$\Delta\varphi(x,s),\ \Delta_{\widetilde{x}^+} h(p,x^+,\widetilde{u},t),\ \Delta H(\psi,x,s,t) = H(\psi,\widetilde{x},s,t) - H(\psi,x,s,t)$$

по формуле Тейлора первого порядка.

Рассматривая формулу (4.7)–(4.8) на игольчатой вариации допустимого управления, получим необходимое условие оптимальности первого порядка — классический ПМ Понтрягина.

Теорема 4.1. *Пусть* $\{u^*, x^*\}$ *— оптимальный процесс в задаче* (4.1)–(4.6)*. Тогда этот процесс удовлетворяет почти всюду на* T *условию максимума*

$$h(p^*(t),x^{+*}(s_0,t),u^*(t),t) = \max_{u\in U} h(p^*(t),x^{+*}(s_0,t),u,t), \tag{4.11}$$

где $p^*(t)$ *— решение сопряженной задачи* (4.9)–(4.10) *при* $x = x^*(s,t)$*,* $u = u^*(t)$*.*

Формула приращения целевого функционала (4.7)–(4.8), оценка с помощью неравенства остаточного члена в этой формуле через меру области игольчатого варьирования и, наконец, поточечный ПМ (4.11) позволяют использовать в рассматриваемой задаче итерационные методы последовательных приближений, разработанные для задач оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Обзор этих методов приведен в предыдущем разделе.

Сформулированный выше ПМ является достаточно прогнозируемым в задаче (4.1)–(4.6). Игольчатая вариация управления, благодаря дифференциальной связи на границе, вызывает малое по норме пространства $C(T)$ возмущение начального состояния, которое затем распространяется по области П.

К значительно более полным и нестандартным результатам приводит рассмотрение частного класса задач с линейными по состоянию правыми частями дифференциальных уравнений и зависящими от управления коэффициентами при фазовых переменных.

Пусть система гиперболических уравнений линейна, а начально-краевые условия заданы в виде линейных по состоянию систем обыкновенных дифференциальных уравнений с матрицами коэффициентов, зависящими от управления. Правые части систем (4.1), (4.4) записываются следующим образом:

$$f(x,s,t) = B(s,t)x + d(s,t),$$
$$g(x^+(s_0,t),u,t) = C(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(u(t),t).$$

Цель задачи состоит в минимизации линейного целевого функционала

$$J(u) = \int_S \langle c(s), x(s,t_1)\rangle ds + \iint_\Pi \langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle\, ds\, dt.$$

Для подобного класса задач ПМ является необходимым, но не достаточным условием оптимальности в силу зависимости матрицы коэффициентов системы обыкновенных дифференциальных уравнений от управления. Применение для такой задачи общих алгоритмов методов, основанных на использовании игольчатых вариаций, приводит к итерационному процессу, на каждом шаге которого необходимо неоднократно интегрировать системы гиперболических уравнений.

Рассмотрим отличный от классического точный вариант формулы приращения целевого функционала на двух допустимых процессах $\{u,x\}$ и $\{\widetilde{u},\widetilde{x}\}$:

$$\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = -\int_T \left\langle p(t,\widetilde{u}), \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)x^+(s_0,t,\widetilde{u}) + \Delta b(u(t),t)\right\rangle dt. \tag{4.12}$$

Здесь функции $p(t)$ и $\psi(s,t)$ являются решениями следующей сопряженной задачи:

$$\psi_t + (A\psi)_s = -B^T\psi + b_0(s,t),$$
$$\psi(s,t_1) = -c(s), \quad s \in S;$$
$$\psi^+(s_1,t) = 0, \quad \psi^-(s_0,t) = 0, \quad t \in T;$$
$$\dot{p} = -C^T(u(t),t)p(t) - A^+(s_0,t)\,\psi^+(s_0,t), \quad t \in T,$$
$$p(t_1) = 0.$$

Симметричный вариант формулы приращения

$$\Delta J(u) = -\int_T \left\langle p(t,\widetilde{u}), \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)\, x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)\right\rangle dt. \tag{4.13}$$

Формулы (4.12), (4.13) позволяют доказать вариационные необходимые и достаточные условия оптимальности.

Теорема 4.2. *Для оптимальности управления $\widetilde{u}(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо и достаточно, чтобы управление $\widetilde{v} = \widetilde{u}(t)$ было оптимальным в каждой из задач*

$$I(v) = -\int_T \langle p(t,u), (C(v(t),t) - C(u(t),t))y(t,v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\, dt \to \min,$$
$$\dot{y} = C(v(t),t)y + b(v(t),t), \quad t \in T, \tag{4.14}$$

$$y(t_0) = \left(x^0(s_0)\right)^+,$$
$$v(t) \in U, \quad t \in T;$$
$$\Phi(v) = -\int_T \langle p(t,v), \left(C(v(t),t) - C(u(t),t)\right) x^+(s_0,t,u) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle\, dt \to \min,$$
$$\dot{p} = -C^T(v(t),t)p - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T, \tag{4.15}$$
$$p(t_1) = 0,$$
$$v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Каждый из вариационных принципов максимума (4.14), (4.15) позволяет осуществить редукцию исходной задачи оптимального управления к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Преимущества такого способа решения по сравнению с итерационными методами, в основе которых лежит ПМ Понтрягина, состоят в следующем. Во-первых, система дифференциальных уравнений с частными производными интегрируется только два раза (поиск $\psi = \psi(s,t)$ и состояния, соответствующего управлению). Если бы задача (4.1)–(4.6) решалась итерационными процессами классического ПМ, то на каждой итерации приходилось бы неоднократно интегрировать гиперболическую систему (4.1). Во-вторых, для решения вспомогательной задачи, на данный момент уже хорошо изученной, можно использовать весь набор достаточно эффективных методов, обзор которых приведен во втором разделе данной статьи.

Исследование случая квадратичного целевого функционала приводит к двум уже несимметричным результатам. Неклассические формулы приращения второго порядка позволяют в одном случае свести исходную задачу к задаче минимизации квадратичного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений, а во втором случае — к задаче минимизации линейного функционала в системе обыкновенных дифференциальных уравнений большей размерности [79].

4.2. *Вариационный принцип максимума в задачах оптимизации с управляемыми конечномерными связями на границе.* Продолжим исследование задачи оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений первого порядка

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi. \tag{4.16}$$

Как и ранее, предполагаем, что система приведена к инвариантному виду, диагональные элементы матрицы A знакопостоянны в $\overline{\Pi}$, а из вектора состояния $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выделены два подвектора: $x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$ и $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n)$, $m_1 \le m_2$, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A.

Для системы (4.16) поставим управляемые начальные условия

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S. \tag{4.17}$$

Для простоты изложения будем считать условия при $s = s_0$ и $s = s_1$ фиксированными

$$x^+(s_0,t) = g^{(1)}(t), \quad x^-(s_1,t) = g^{(2)}(t), \quad t \in T. \tag{4.18}$$

Множеством допустимых управлений является совокупность ограниченных и измеримых на S вектор-функций $u = (u_1(s),\, u_2(s), \ldots, u_r(s))$, удовлетворяющих почти всюду на этом отрезке ограничению

$$u(s) \in U, \tag{4.19}$$

где U — компакт из пространства E^r.

Качество управляемого процесса оценим функционалом

$$J(u) = \int_\Omega \Phi(x,s,t)(ds+dt) + \iint_\Pi F(x,s,t)ds\,dt; \tag{4.20}$$

$$\Phi(x,s,t) = \begin{cases} \varphi_0(x^-(s_0,t),t), & t \in T,\ s = s_0; \\ \varphi(x(s,t_1),s), & s \in S,\ t = t_1; \\ -\varphi_1(x^+(s_1,t),t), & t \in T,\ s = s_1, \end{cases}$$

где Ω — граница прямоугольника Π, из которой исключен отрезок $\{(s,t) \in E^2 : s \in S,\ t = t_0\}$.

Поставим задачу минимизации данного функционала, определенного на решениях задачи (4.16)–(4.18), при допустимых управлениях, удовлетворяющих ограничению типа включения (4.19).

В дальнейшем для компактности изложения понадобится операция выделения из произвольного вектора пространства E^n i-й компоненты. Пусть $a \in E^n$, $b_i \in E^1$. Обозначим

$$\widetilde{a}_i = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$
$$a\dot{+}b_i = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Теорема 4.3. *Пусть процесс $\{u, x\}$ является оптимальным в задаче* (4.16)–(4.20). *Тогда почти всюду на отрезке S выполняется условие максимума*

$$I(u(\xi),\xi) = \max_{v \in U} I(v,\xi), \quad \xi \in S,$$

где

$$I(v,\xi) = \sum_{i=1}^n \Big\{ -\Phi(z_i(\tau_i),\xi_i,\tau_i) \frac{\partial s_i(\xi,t_0;\tau_i)}{\partial \xi} \mu(\xi_i,\tau_i) + $$
$$+ \int_{t_0}^{\tau_i} [\langle \widetilde{\psi}_i(s,t), \widetilde{f}_i(z_i(t),s,t)\rangle - F(z_i(t),s,t)]\big|_{s=s_i(\xi,t_0;t)} \frac{\partial s_i(\xi,t_0;t)}{\partial \xi}\,dt \Big\},$$

$$z_i(t) = x(s_i(\xi,t_0;t),t)\dot{+}(y_i(t) - x_i(s_i(\xi,t_0;t),t)),$$

функции $y_i(t)$ определяются из систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_i(t) = f_i(z_i(t), s_i(\xi,t_0;t),t), \quad t \in [t_0,\tau_i],$$
$$y_i(t_0) = p_i(v,\xi),$$

(ξ_i,τ_i) *— конечные точки характеристик $s = s_i(\xi,t_0;t)$, $\psi = \psi(s,t)$ — решение на оптимальном процессе сопряженной задачи,*

$$\mu(\xi_i,\tau_i) = \begin{cases} 1, & \tau_i = t_1,\ s_0 < \xi_i \le s_1; \\ -1/a_i(s_0,\tau_i), & t_0 < \tau_i \le t_1,\ \xi_i = s_0; \\ -1/a_i(s_1,\tau_i), & t_0 < \tau_i \le t_1,\ \xi_i = s_1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы основано на анализе формулы приращения целевого функционала на игольчатой вариации допустимого управления

$$\Delta u(s) = \begin{cases} v - u(s), & s \in S_\varepsilon; \\ 0, & s \in S \setminus S_\varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $S_\varepsilon = (\xi - \varepsilon, \xi)$, $\xi \in (s_0, s_1]$, $\varepsilon \in (0, \xi - s_0]$, $v \in U$.

Оценка приращения состояния $\|\Delta x(s,t)\|_{E^n} \le K\varepsilon$, $K > 0$, вызванного вариацией управления, справедлива только для тех точек, которые не принадлежат характеристическим полоскам

$$\{(s,t) \in P : s_i(\xi - \varepsilon, t_0, t) < s \le s_i(\xi, t_0, t)\}.$$

Однако невозможно получить подобную оценку приращения компонент вектор-функции состояния $\Delta x_i(s,t)$ в соответствующих характеристических полосках.

Следовательно, в отличие от обычной схемы получения необходимого условия оптимальности типа ПМ, в данной задаче оптимального управления не удается установить неравенство, оценивающее в целом приращение состояния системы через меру области игольчатого варьирования. Это связано с особенностями рассматриваемых систем дифференциальных уравнений: в гиперболических системах начальное возмущение переносится вдоль характеристических полосок. В этих характеристических полосках (множествах) и сосредотачивается основная часть возмущения решения, вызванного вариацией начальных условий на отрезке S. Именно этим обстоятельством объясняется невозможность доказательства в рассматриваемой задаче классического условия оптимальности типа ПМ Понтрягина.

Приведем примеры, иллюстрирующие условия оптимальности.

Пример 4.1. Пусть в прямоугольнике $S \times T$, $S = [s_n, s_k]$, $T = [t_0, t_1]$, управляемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей:

$$x_{1t} + \lambda x_{1s} = \alpha(s)(x_1 - x_2),$$
$$x_{2t} - \lambda x_{2s} = \beta(s)(x_1 - x_2),$$
$$x_1(s,t_0) = u(s) + q(s), \quad x_2(s,t_0) = u(s) - q(s), \quad s \in S.$$

Допустимые управления — скалярные функции $u(s)$, удовлетворяющие поточечному ограничению

$$u(s) \in U \subset E^1, \quad s \in S.$$

Цель задачи заключается в минимизации функционала

$$J(u) = \int_S (x_1(s,t_1) + x_2(s,t_1) - \eta(s))^2 \, ds.$$

Функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $q(s)$, $\eta(s)$ и положительная константа λ считаются заданными. Дополнительно предполагаем, что выполнено условие

$$s_k - s_n > 2\lambda(t_1 - t_0), \tag{4.21}$$

смысл которого будет пояснен чуть позже.

В этом примере два семейства характеристик определяются уравнениями $s_1 = -\lambda t + \text{const}$, $s_2 = \lambda t + \text{const}$. В силу постоянства коэффициентов λ следует

$$\frac{\partial s_1(\xi, t_0; \alpha)}{\partial \xi} = \frac{\partial s_2(\xi, t_0; \alpha)}{\partial \xi} = 1.$$

Пусть $\{u, x\}$ — оптимальный процесс, $\psi(s,t)$ — вычисленное на этом процессе решение сопряженной задачи.

Из теоремы 4.3 следует, что почти всюду на отрезке S выполняется условие максимума функционала $I(v, \xi)$. Вид этого функционала и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений зависит в нашем случае от расположения точки ξ на отрезке S.

а) $s_n + (t_1 - t_0)\lambda \le \xi \le s_k - (t_1 - t_0)\lambda$. Неравенство (4.21) гарантирует, что этот отрезок непустой. Уравнения характеристик, исходящих из точки (ξ, t_0) имеют вид

$$s_1 = \lambda(t_0 - t) + \xi, \quad s_2 = \lambda(t - t_0) + \xi.$$

Конечными точками этих характеристик являются точки отрезка $\{(s,t) : s \in S,\ t = t_1\}$. В данном случае

$$
\begin{aligned}
I(v,\xi) = &-(y_1(t_1) + x_2(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_0 - t_1) + \xi))^2 + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\,\beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\,dt - \\
&- (y_2(t_1) + x_1(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_1 - t_0) + \xi))^2 + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\,\alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\,dt,
\end{aligned}
$$

$$
\dot{y}_1(t) = \alpha(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)), \quad t \in T, \tag{4.22}
$$

$$
\dot{y}_2(t) = \beta(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t_0 - t) + \xi, t) - y_2(t)), \quad t \in T, \tag{4.23}
$$

$$
y_1(t_0) = v(\xi) + q(\xi), \quad y_2(t_0) = v(\xi) - q(\xi). \tag{4.24}
$$

б) $s_n \le \xi < s_n + (t_1 - t_0)\lambda$. В этом случае характеристика первого семейства, проходящая через точку (ξ, t_0), в качестве конечной имеет точку $(s_n, t_0 + (\xi - s_n)/\lambda)$. Характеристика же второго семейства заканчивается в точке $(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1)$. Целевой функционал имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
I(v,\xi) = &\int_{t_0}^{t_0 + (\xi - s_n)/\lambda} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\,\beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - \\
&- x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\,dt - (y_2(t_1) + x_1(\lambda(t_1 - t_0) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_1 - t_0) + \xi))^2 + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\,\alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\,dt.
\end{aligned}
$$

При этом функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши (4.22)–(4.24). Однако уравнение (4.22) рассматривается при $t \in [t_0, t_0 + (\xi - s_n)/\lambda]$.

в) $s_k - (t_1 - t_0)\lambda < \xi \le s_k$. Этот случай симметричен только что рассмотренному. Характеристика второго семейства, начинающаяся в точке (ξ, t_0), в качестве конечной имеет точку $(s_k, t_0 + (s_k - \xi)/\lambda)$. Характеристика первого семейства заканчивается в точке $(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1)$ и

$$
\begin{aligned}
I(v,\xi) = &-(y_1(t_1) + x_2(\lambda(t_0 - t_1) + \xi, t_1) - \eta(\lambda(t_0 - t_1) + \xi))^2 + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \psi_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t)\,\beta(\lambda(t_0 - t) + \xi)(y_1(t) - x_2(\lambda(t_0 - t) + \xi, t))\,dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_0 + (s_k - \xi)/\lambda} \psi_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t)\alpha(\lambda(t - t_0) + \xi)(x_1(\lambda(t - t_0) + \xi, t) - y_2(t))\,dt.
\end{aligned}
$$

Функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши (4.22)–(4.24). Однако уравнение (4.22) рассматривается при $t \in [t_0, t_0 + (s_k - \xi)/\lambda]$.

Данный пример иллюстрирует случай различных диагональных элементов матрицы гиперболического оператора. Фигурирующие в условии оптимальности задачи оптимального управления начальными условиями систем обыкновенных дифференциальных уравнений имеют ряд особенностей. Во-первых, несмотря на аддитивность целевого функционала, каждая из задач не распадается на задачи оптимизации в отдельных обыкновенных дифференциальных уравнениях, построенных вдоль характеристик гиперболического оператора. Во-вторых, каждое из уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается на, вообще говоря, различных отрезках изменения независимой переменной.

Пример 4.2. В прямоугольнике $S \times T$, $S = [0, s_k]$, $T = [t_0, t_1]$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$x_{1t} + x_{1s} = \alpha(s,t)x_1 + \beta(s,t)x_2,$$
$$x_{2t} + x_{2s} = \mu(s,t)x_1 + \gamma(s,t)x_2;$$
$$x_1(0,t) = 1 - v(t), \quad x_2(0,t) = v(t), \quad t \in T;$$
$$x_1(s,t_0) = \overline{x}_1(s), \quad x_2(s,t_0) = \overline{x}_2(s), \quad s \in S.$$

Допустимые управления — скалярные функции $v(t)$, удовлетворяющие поточечному ограничению

$$v(t) \in [0,1], \quad t \in T.$$

Цель задачи заключается в минимизации функционала

$$J(v) = \int_S \left(x_1(s,t_1) + x_2(s,t_1) - \eta(s)\right)^2 ds.$$

Функции $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$, $\mu(s,t)$, $\gamma(s,t)$, $\overline{x}_1(s)$, $\overline{x}_2(s)$, $\eta(s)$ считаются заданными. Будем предполагать также, что $s_k > t_1 - t_0$. Задачи рассматриваемого вида возникают при изучении процессов в распределенных по возрасту популяциях, исследовании распространения болезней, наркомании и т. п.

В данном примере коэффициенты при производных по переменной s в обоих уравнениях равны одной и той же константе 1. В силу этого факта условие оптимальности теоремы 4.3 имеет очень простой вид.

Действительно, уравнение характеристики, проходящей через точку $(0,\tau)$, имеет вид $s_i = t - \tau$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\frac{\partial s_i(s_0,\tau;t)}{\partial \tau} = -1.$$

Условие $s_k > t_1 - t_0$ гарантирует, что все характеристики, выходящие из точек $(0,\tau)$, $\tau \in [t_0, t_1]$, в качестве конечных имеют точки из отрезка $\{(s,t) : s \in S,\, t = t_1\}$. На оптимальном процессе $\{v^*, x^*\}$ почти в каждой точке $\tau \in T$

$$I^{(1)}(v^*(\tau),\tau) = \max_{v\in[0,1]} I^{(1)}(v,\tau),$$

где

$$I^{(1)}(v(\tau),\tau) = -\left(y_1(t_1) + y_2(t_1) - \eta(t_1 - \tau)\right)^2,$$
$$\dot{y}_1 = \alpha(t-\tau,t)y_1(t) + \beta(t-\tau,t)y_2(t),$$
$$\dot{y}_2 = \mu(t-\tau,t)y_1(t) + \gamma(t-\tau,t)y_2(t), \quad t \in [\tau, t_1],$$
$$y_1(\tau) = 1 - v, \quad y_2(\tau) = v.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере вариационный ПМ сводится к простейшему условию максимума вдоль семейства характеристик системы.

Доказательство вариационного ПМ способом, основанным на исследовании формулы приращения целевого функционала, позволяет построить итерационный метод поиска управлений, удовлетворяющих этому необходимому условию оптимальности.

Разработанные подходы могут быть распространены и на другие типы дифференциальных уравнений и систем. Использованный аппарат характеристик весьма существенен при получении специфических условий оптимальности типа вариационного ПМ.

Литература

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Физматгиз, 1961. – 391 с.

[2] Понтрягин Л.С. *Принцип максимума.* – М.: Фонд матем. образования и просвещения, 1998. – 70 с.

[3] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.

[4] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – М.: Наука, 1979. – 429 с.

[5] Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* – М.: Факториал, 2002. – 824 с.

[6] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Принцип максимума в теории оптимального управления.* – Минск: Наука и техника, 1974. – 272 с.

[7] Матвеев А.С., Якубович В.А. *Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи*: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербургск. ун-та, 2003. – 540 с.

[8] Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения.* – М.: Факториал, 2006. – 144 с.

[9] Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. *Принцип максимума в оптимальном управлении.* – М.: Изд-во МГУ, 2004. – 167 с.

[10] Ащепков Л.Т. *Лекции по оптимальному управлению*: Учеб. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 1996. – 208 с.

[11] Dykhta V.A. *Lyapunov–Krotov inequality and sufficient conditions in optimal control* // J. Math. Sci. – 2004. – V. 121. – № 2. – P. 2156–2177.

[12] Дыхта В.А. *Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении* // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ, 2006. – Т. 110. – С. 76–108.

[13] Антипина Н.В., Дыхта В.А. *Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12.– С. 11–21.

[14] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. *Теория принципа максимума* // Методы теории экстремальных задач в экономике. – М.: Наука, 1981. – С. 6–47.

[15] Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. *Необходимое условие в оптимальном управлении.* – М.: Наука, 1990. – 319 с.

[16] Милютин А.А. *Принцип максимума в общей задаче оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2001. – 304 с.

[17] Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.* – М.: Факториал, 1997. – 256 с.

[18] Мордухович Б.Ш. *Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления.* – М.: Наука, 1988. – 360 с.

[19] Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.

[20] Vinter R.B. *Optimal control.* – Boston–Basel–Berlin: Burkhauser, 2000. – 504 p.

[21] Мордухович Б.Ш. *Оптимальное управление разностными, дифференциальными и дифференциально-разностными включениями* // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ, 1999. – Т. 61. – С. 33–65.

[22] Асеев С.М. *Задача оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением. Гладкие аппроксимации и необходимые условия оптимальности* // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ, 1999. – Т. 64. – С. 57–81.

[23] Clarke F. *The maximum principle in optimal control: then and now* // J. Contr. and Cybern. – 2005. – V. 34. – № 3. – P. 709–722.

[24] Clarke F. *Necessary conditions in dynamic optimization* // Memoirs the Amer. Math. Soc. – 2005. – V. 173. – № 816. – 113 p.

[25] Arutunov A., Karamzin D., Pereira F. *A nondegenerate maximum principle for optimal control problem with state constraints* // SIAM J. Contr. Optim. – 2005. – V. 43. – № 5. – P. 1812–1843.

[26] Дикусар В.В., Милютин А.А. *Качественные и численные методы в принципе максимума.* – М.: Наука, 1989. – 144 с.

[27] Милютин А.А., Илютович А.Е., Осмоловский Н.П., Чуканов С.В. *Оптимальное управление в линейных системах.* – М.: Наука, 1993. – 268 с.

[28] *Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения* / В.А. Батурин, В.А. Дыхта, А.И. Москаленко и др. – Новосибирск: Наука, 1990. – 190 с.

[29] Milyutin A.A. *Calculus of variations and optimal control* // Proc. of the Int. Conf. on the calculus of variations and related topics. – Haifa: Chapman and Hall / CRC Research Notes in Math. Series, 1999. - V. 411. – P. 159–172.

[30] Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. *Calculus of variation and optimal control.* – Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. – 372 p.

[31] Гурман В.И. *Принцип расширения в задачах управления.* – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.

[32] Caratheodory C. *Calculus of variations and partial differential equations of the first order.* V. 2. – San Francisco: Holden-Day, 1965. – 224 p.

[33] Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1974. – 488 с.

[34] Krotov V.F. *Global methods in optimal control theory.* – New York: Marcel Dekker, 1996. – 408 p.

[35] Кротов В.Ф., Гурман В.И. *Методы и задачи оптимального управления.* – М.: Наука, 1973. – 448 с.

[36] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern B.J. *Proximal analysis and feedback consruction* // Тр. ин-та матем. и механ. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – Т. 6. – № 1–2. – С. 91–109.

[37] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern B.J. *Invariance, monotonicity and applications* // Nonlinear analysis, differential equations and control (NATO ASI, Montreal, 1998) / Eds. F.H. Clarke, B.J. Stern. – Dordreht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – P. 207–305.

[38] Хрусталев М.М. *Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем.* I. *Оценки и точное описание множеств достижимости и управляемости* // Автоматика и телемехан. – 1988. – № 5. – С. 62–71.

[39] Хрусталев М.М. *Точное описание множеств достижимости и условие глобальной оптимальности динамических систем.* II. *Условия глобальной оптимальности* // Автоматика и телемехан. – 1988. – № 7. – С. 70–80.

[40] Clarke F.H. *Nonsmooth analysis in control theory: a survey* // European J. Control. Fundamental issues in control. – 2001. – V. 7. – № 2–3. – P. 145–159.

[41] Pereira F.L. *Control design for autonomous vehicles: a dynamic optimization perspective* // European J. Control. Fundamental issues in control. – 2001. – V. 7. – № 2–3. – P. 178–202.

[42] Субботин А.И. *Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби.* – М.: Наука, 1991. – 216 с.

[43] Субботин А.И. *Минимаксные решения уравнений Гамильтона–Якоби* // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ, 1999. – Т. 64. – С. 222–231.

[44] Cannarsa P., Sinestrari C. *Semiconcave functions, Hamilton–Jacobi equations and optimal control* // Progress in nonlinear differential equations and their appications. – Boston: Birkhauser, 2004. – V. 58. – 304 p.

[45] Ушаков В. Н., Ченцов А.Г. *Андрей Измайлович Субботин* // Тр. ин-та матем. и механ. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – Т. 6. – № 1–2. – С. 3–26.

[46] Черноусько Ф.Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов.* – М.: Наука, 1988. – 320 с.

[47] Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. *Вариационные задачи механики и управления* (*численные методы*). – М.: Наука, 1973. – 238 с.

[48] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Качественная теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1971. – 508 с.

[49] Кирин Н.Е. *Вычислительные методы теории оптимального управления.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 144 с.

[50] Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1994. – 344 с.

[51] Васильев О.В., Аргучинцев А.В., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, основанные на допустимых вариациях* // Тр. 12-й Байкальской межд. конф. "Методы оптимизации и их прилож.". Пленарн. докл. – Иркутск, 2001. – С. 52–68.

[52] Тятюшкин А.И. *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 193 с.

[53] Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.

[54] Васильев О.В., Дыхта В.А., Срочко В.А. *Задачи оптимального управления: вариационный принцип максимума и методы численного решения* // Нелинейная теория управления и ее прилож. / Под ред. В.М. Матросова, С.Н. Васильева, А.И. Москаленко. – М.: Физматлит, 2000. – 320 с.

[55] Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 488 с.

[56] Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[57] Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. *Приближенные методы решения экстремальных задач.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. – 180 с.

[58] Тятюшкин А.И. *Многометодная технология оптимизации управляемых систем.* – Новосибирск: Наука, 2006. – 343 с.

[59] Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* – Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.

[60] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивные методы оптимизации.* Ч. 2. *Задачи управления.* – Минск: Изд-во "Университетское", 1984. – 207 с.

[61] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Оптимальное управление в режиме реального времени* // Вторая межд. конф. по проблемам управления: Пленарн. докл. – М.: Институт проблем управления, 2003. – С. 20–47.
[62] Моисеев Н.Н. *Элементы теории оптимальных систем.* – М.: Наука, 1975. – 528 с.
[63] Евтушенко Ю.Г. *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.* – М.: Наука, 1982. – 432 с.
[64] Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Т.И. *Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления.* – Киев: Наук. думка, 1978. – 164 с.
[65] Сиразетдинов Т.К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1977. – 480 с.
[66] Егоров А.И. *Основы теории управления.* – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
[67] Островский Г.М., Волин Ю.М. *Методы оптимизации химических реакторов.* – М.: Химия, 1967. – 248 с.
[68] Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
[69] Срочко В.А. *Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами* // Вопросы устойчивости и оптимизации динамических систем. – Иркутск, 1983. – С. 170–182.
[70] Срочко В.А. *Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса–Дарбу* // Сиб. матем. журн. – 1984. – Т. 25. – № 1. – С. 126–133.
[71] Срочко В.А. *Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления.* – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1989. – 160 с.
[72] Терлецкий В.А. *Вариационный принцип максимума в управляемых системах одномерных гиперболических уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 82–90.
[73] Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. *К теории принципа максимума для управляемых систем гиперболического типа* // Теор. и прикл. вопросы оптимального управления. – Новосибирск, 1985. – С. 41-58.
[74] Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. *Принцип максимума для полулинейных гиперболических систем при функциональных ограничениях* // Дифференц. уравнения и численные методы. – Новосибирск: Наука, 1986. – С. 200–207.
[75] Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А., Москаленко А.И., Овсянникова Н.А. *Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем.* – Новосибирск: Наука, 1993. – 197 с.
[76] Аргучинцев А.В. *Неклассическое условие оптимальности в задаче управления граничными условиями полулинейной гиперболической системы* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 3–11.
[77] Аргучинцев А.В. *Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 23–29.
[78] Аргучинцев А.В. *Оптимизация гиперболических систем с управляемыми начально-краевыми условиями в виде дифференциальных связей* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44. – № 2. – С. 285–294.
[79] Аргучинцев А.В. *Оптимальное управление гиперболическими системами.* – М.: Физматлит, 2007. – 168 с.
[80] Дыхта В.А. *Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 1. – С. 70–82.
[81] Дыхта В.А. *Вариационный принцип максимума для классических задач оптимального управления* // Автоматика и телемехан. – 2002. – № 4. – С. 47–54.
[82] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями.* – М.: Физматлит, 2003. – 256 с.
[83] Ащепков Л.Т. *Оптимальное управление разрывными системами.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 226 с.
[84] Clarke F.H., Vinter R.B. *Applications of optimal multiprocesses* // SIAM J. Contr. Optim. – 1989. – V. 27. – № 5. – P. 1048–1071.
[85] Clarke F.H., Vinter R.B. *Optimal multiprocesses* // SIAM J. Contr. Optim. – 1989. – V. 27. – № 5. – P. 1072–1091.
[86] Миллер Б.М., Рабинович Е.Я. *Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями.* – М.: Наука, 2005. – 429 с.
[87] Дмитрук А.В., Каганович А.М. *Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями* // Нелинейные динамические системы и управление. Т. 6. – М.: Наука, 2008.
[88] Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П. *Условия высших порядков в задачах с ограничениями* // УМН. – 1978. – Т. 33. – № 6. – С. 85–147.

[89] Арутюнов А.В., Винтер Р.Б. *Метод конечной аппроксимации в теории оптимального управления* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 11. – С. 1443–1451.

[90] Arutunov A.V., Vinter R.B. *A simple "finite approximation" proof of the Pontryagin maximum principle under reduced differentiability hypotheses* // Set-valued analysis. – 2004. – V. 12. – № 1–2. – P. 5–24.

[91] Sussman H.J. *Geometry and optimal control* // Mathematical control theory / Eds. J. Baillieul and J.C. Willems. – New York: Springer, 1998. – P. 140–198.

[92] Sussman H.J. *New theories of set-valued differentionals and new versions of the maximum principle of optimal control theory* // Nonlinear control in the year 2000 / Eds. A. Isidory, F. Lamanbhi-Lagarrique, and W. Respondek. – London: Springer, 2000. – P. 487–526.

[93] Дмитрук А.В. *Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями* // Оптимальность управляемых динамических систем. – М.: ВНИИСИ, 1993. – Вып. 14. – С. 26–42.

[94] Милютин А.А. *Выпуклозначные липшицевы дифференциальные включения и принцип максимума Понтрягина* // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. – 1999. – Т. 65. – С. 175–184.

[95] Sussmann H.J. *Needle variations and almost lower semicontinuous differential inclussions* // Set-valued analysis. – 2002. – V. 10. – № 2–3. – P. 233–285.

[96] Асеев С.М., Кряжимский А.В. *Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста* // Тр. МИАН. – М.: Наука, 2007. – Т. 257. – 272 с.

[97] Арутюнов А.В. *Принцип максимума Понтрягина и достаточные условия для нелинейных задач* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 12. – С. 1587–1595.

[98] Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. *Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. –№ 11. – С. 1888–1894.

[99] Donchev T., Rios V., Wolenski P. *Strong invariance and one-sided Lipschitz multifunctions* // Nonlinear analysis. TMA. – 2005. – V. 60. – № 5. –P. 849–862.

[100] Aubin J.-P., Cellina A. *Differential inclusions.* – Berlin: Springer-Verlag. – 1984. – 342 p.

[101] Kurzhanskii A.B., Filippova T.F. *On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control* // Advanced in nonlinear dynamics and control: a report from Russia / Ed. A.B. Kurzhanskii. – Boston: Burkhauser, 1993. – P. 122–188.

[102] Москаленко А.И. *Методы нелинейных отображений в оптимальном управлении.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 222 с.

[103] Дыхта В.А. *Общая схема преобразований экстремальных задач и ее приложения в оптимальном управлении* // Интегродифференц. уравнения и их прилож. – Иркутск, 1987. – С. 82–91.

[104] Дыхта В.А., Антипина Н.В. *Достаточное условие оптимальности для задач импульсного управления* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 4. – С. 76–83.

[105] Milyutin A.A. *An example of an optimal control problem whose extremals possess a continual set of discontinuities of the control function* // Russian J. Math. Physics. – 1994. – V. 1. – № 3. – P. 397–402.

[106] Kurzhanskii A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* – Boston: Birkhauser, 1997. – 220 p.

[107] Clarke F.H. *A proximal characterization of the reachable set* // System and Control Letters. – 1996. – V. 27. – P. 195–197.

[108] Vinter R.B. *A characterization of the reachable set for nonlinear control system* // SIAM J. Contr. Optim. – 1980. – V. 18. – № 6. – P. 599–610.

[109] Cannarsa P., Frankowska H. *Some characterizations of optimal trajectories in control theory* // SIAM J. Contr. Optim. – 1991. – V. 29. – № 6. – P. 1322–1347.

[110] Cannarsa P., Frankowska H., Sinestrari S. *Optimality conditions and synthesis for the minimum time problem* // Set-valued analysis. – 2000. – V. 8. – № 1–2. – P. 127–148.

[111] Wolenski P., Shuang Yu. *Proximal analysis and the minimal time function* // SIAM J. Contr. Optim. – 1998. – V. 36. – № 3. – P. 1048–1072.

[112] Хрусталев М.М. *Необходимые и достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 242. – № 5. – С. 1023–1026.

[113] Motta M., Rampazzo F. *Dynamic programming for nonlinear system driven by ordinary and impulsive controls* // SIAM J. Contr. Optim. – 1996. – V. 34. – № 1. – P. 199–225.

[114] Стефанова А.В. *Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана в нелинейной задаче импульсного управления* // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. – 1998. – Т. 5. – С. 301–318.

[115] Pereira F.L., Matos A.S. *Hamilton–Jacobs conditions for a measure differential inclusion control problem* // Proc. of 12th Baikal Internat. Conf. "Optimization methods and their applications". Plenary Lect. – Irkutsk, 2001. – P. 237–245.

[116] Vinter R.B. *Weakest conditions for existence of Lipschitz continuous Krotov functions in optimal control theory* // SIAM J. Contr. Optim. – 1983. – V. 21. – № 2. – P. 215–234.
[117] Vinter R.B. *New global optimality conditions in optimal control theory* // SIAM J. Contr. Optim. – 1983. – V. 21. – № 2. – P. 235–245.
[118] Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* – Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 1990. – 461 p.
[119] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* – М.: Наука, 1974. – 455 с.
[120] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. *О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1962. – Т. 2. – № 6. – С. 1132–1139.
[121] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. *Алгоритм метода последовательных приближений для задач оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 1. – С. 14–34.
[122] Kelly H.J., Kopp R.E., Moyer H.G. *Successive approximation techniques for trajectory optimization* // Proc. Symp. on vehicle system optimization. – New York, 1961. – P. 360–391.
[123] Величенко В.В. *Численный метод решения задач оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. –1966. – Т. 6. – № 4. – С. 635–647.
[124] Васильев О.В., Тятюшкин А.И. *Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1981. – Т. 21. – № 6. – С. 1376–1384.
[125] Тарасенко Н.В. *Один метод решения задачи оптимального управления на основе интегрального принципа максимума* // Дискретные и распределенные системы. – Иркутск, 1981. – С. 142–150.
[126] Любушин А.А., Черноусько Ф.Л. *Метод последовательных приближений для расчета оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 147–159.
[127] Vasiliev O.V. *Optimization methods.* – Atlanta: World Federation Publishers Company Inc., 1996. – 276 p.
[128] Васильев О.В. *Одно замечание к алгоритму последовательных приближений, основанному на принципе максимума* // Дифференц. и интегральные уравнения. – Иркутск, 1980. – С. 167–178.
[129] Антоник В.Г., Срочко В.А. *К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32. – № 7. – С. 979–991.
[130] Антоник В.Г., Срочко В.А. *Метод проекций в линейно-квадратичных задачах оптимального управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38. – № 4. – С. 564–572.
[131] Захарченко В.Г., Срочко В.А. *Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 6. – С. 145–154.
[132] Мамонова Н.В., Срочко В.А. *Итерационные процедуры решения задач оптимального управления на основе квазиградиентных аппроксимаций* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 55–67.
[133] Срочко В.А. *Модернизация методов градиентного типа в задачах оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 66–78.
[134] Болдырев В.И. *Численное решение задачи оптимального управления* // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 3. – С. 85–92.
[135] Батурин В.А. *Приближенные методы решения задач оптимального управления на основе достаточных условий оптимальности В.Ф. Кротова* // Тр. IX межд.Четаевской конф. “Аналитическая механ., устойчивость и управление движением”, посвященной 105-летию Н.Г. Четаева. Т. 3. Управление и оптимизация. – Иркутск, 2007. – С. 30–47.
[136] Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В. *Методы решения задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина* // Тр. Матем. ин-та РАН. – 1995. – Т. 211. – С. 3–31.
[137] Стрекаловский А.С. *Элементы невыпуклой оптимизации.* – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.
[138] Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Численные методы программной и позиционной оптимизации кусочно-линейных систем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 11. – С. 1658–1674.
[139] Габасов Р., Кириллова Ф.М., Хомицкая Т.Г. *Программное и позиционное решения терминальной линейно-выпуклой задачи оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 3–16.
[140] Каганович С.Л. *Оптимизация линейных систем с переменной структурой* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1981. – Т. 21. – № 2. – С. 306–314.
[141] Кротов В.Ф., Фельдман И.Н. *Итерационный метод решения задач оптимального управления* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1983. – № 2. – С. 160–168.
[142] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
[143] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* – М.: Наука, 1985. – 224 с.
[144] Розоноэр Л.И. *Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем.* I // Автоматика и телемехан. – 1959. – Т. 20. – № 10. – С. 1320–1334.

А.В. Аргучинцев

заведующий кафедрой методов оптимизации,
Иркутский государственный университет,
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, д. 1,

`e-mail:` arguch@math.isu.ru

В.А. Дыхта

главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академи наук,
664054, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134,

`e-mail:` dykhta@gmail.com

В.А. Срочко

заведующий кафедрой вычислительной математики и механики,
Иркутский государственный университет,
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, д. 1,

`e-mail:` srochko@math.isu.ru

A.V. Arguchintsev

Head of the Chair of Optimization Methods,
Irkutsk State University,
1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,

`e-mail:` arguch@math.isu.ru

V.A. Dykhta

Major research worker, Institute of System Dynamics and Control Theory,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664054 Russia,

`e-mail:` dykhta@gmail.com

V.A. Srochko

Head of the Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
Irkutsk State University,
1 K. Marks str., Irkutsk, 664003 Russia,

`e-mail:` srochko@math.isu.ru