Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Иркутский государственный университет»

В.И. Зоркальцев, М.А. Киселева

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Учебное пособие

Иркутск 2007

УДК 519.6
ББК

З – 86

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ Иркутского государственного университета

Р е ц е н з е н т ы:

Академик Ю. Г. Евтушенко

Доктор физико-математических наук Н. Н. Астафьев

Кандидат физико-математических наук А. И. Голиков

Зоркальцев В. И.

З – 86 **Системы линейных неравенств**: учебное пособие / В. И. Зоркальцев, М. А. Киселева – Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2007. – 128с.

ISBN 978-5-9624-0197-3

В пособии рассматриваются математические аспекты теории линейных неравенств. Изложены основы линейной алгебры. Рассмотрены строение множества решений систем линейных неравенств, теоремы об альтернативных системах линейных неравенств и их приложения. Приводятся критерии идентификации несовместности ограничений, решений с минимальным набором активных ограничений, избыточных ограничений. Приводятся алгоритмы внутренних точек решения систем линейных неравенств и задач линейного программирования, методы решения систем линейных неравенств на основе минимизации суммы квадратов невязок исходной и альтернативной систем, алгоритм решения систем нелинейных неравенств методом линеаризации.

Каждый раздел содержит упражнения, вопросы и задачи. Наиболее значимые факты снабжены примерами и подробными пояснениями.

Материалы данного пособия содержат результаты научных исследований авторов, выполненных в рамках проекта РФФИ 05-01-00587 «Развитие теории и методов решения систем линейных и квадратичных неравенств с приложением к моделям энергетики».

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей, специализирующихся в теории оптимизации и математической экономике.

Библиогр.: 20 назв. Ил. 8.

УДК 519.6

ББК

ISBN 978-5-9624-0197-3

Оглавление

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для изучения теории линейных неравенств студентам, специализирующимся в прикладной математике и математической экономике. Здесь рассматриваются системы конечного числа линейных неравенств с конечным числом вещественных переменных. Такие системы являются непосредственным обобщением систем линейных алгебраических уравнений, которые подробно изучаются в курсах линейной алгебры и вычислительной математики.

Действительно, любую систему линейных уравнений можно представить в виде системы линейных неравенств. Это позволяет считать линейные уравнения частным случаем линейных неравенств. Поэтому в данной книге иногда системы линейных уравнений и неравенств будем называть просто системами линейных неравенств.

Вместе с тем линейные неравенства в общем случае нельзя представить в виде линейных уравнений. Поэтому теория линейных неравенств является нетривиальным обобщением теории линейных уравнений. Многие факты теории линейных неравенств имеют аналоги (ослабленные варианты формулировок) в теории линейных уравнений.

В данной книге ограничимся в основном математическим аспектом теории линейных неравенств. Конечно, при изучении студентами линейных неравенств важно приводить их приложения в конкретных задачах или моделях. Можно выделить две обширные области практического применения линейных неравенств.

Во-первых, линейные неравенства имеют большое самостоятельное значение, поскольку многие математические модели представляются в виде таких систем. К ним относятся модели механических систем. Именно в связи с задачами механики стали систематически исследоваться системы линейных неравенств еще в XIX веке. Особый интерес линейные неравенства стали представлять в связи с созданием математической экономики и линейного программирования в середине XX века. Многие модели экономики имеют вид систем линейных неравенств или задач линейного программирования, которые можно считать частным случаем систем линейных неравенств. Для изучения прикладных аспектов теории линейных неравенств в математической экономике можно воспользоваться учебниками [5, 14, 15].

Во-вторых, теория и методы линейных неравенств служат в качестве основы для исследования и решения многих нелинейных задач. При решении систем нелинейных уравнений и неравенств, при поиске оптимального решения задач нелинейного программирования часто используются процедуры, основанные на итеративной линеаризации. Этот вычислительный аспект приложения линейных неравенств вкратце рассматривается в конце учебного пособия. Более глубоко метод линеаризации для решения систем нелинейных уравнений и задач нелинейного программирования рассматривается в [16] и ряде других работ по методам оптимизации и вычислительной математике.

Первая глава носит справочный характер. Здесь излагаются исходные определения и основополагающие факты линейной алгебры, которые необходимы для последующих глав. Специально используется максимально упрощенный подход в определениях, чтобы сделать их доступными для студентов с разным уровнем подготовки.

Эта глава ни в коем случае не претендует на полное изложение линейной алгебры. Она содержит только необходимые для дальнейшего изложения факты. Вместе с тем представляется, что даже студентам, хорошо знающим линейную алгебру, полезно просмотреть эту главу для восстановления и систематизации знаний. Для дальнейшего важны вводимые в первой главе обозначения, которые могут отличаться от используемых в других учебниках.

Отдельные важные и несложно доказываемые математические факты в данной главе, как и в последующих, сформулированы в виде заданий для студентов.

Вторая глава посвящена изучению строения множества решений системы линейных неравенств. В этой главе доказывается, что множество решений системы линейных неравенств представляется в виде суммы двух множеств:

1) выпуклой оболочки конечного числа решений системы линейных неравенств с максимальным набором активных ограничений;
2) многогранного конуса рецессивных направлений для данной системы;

Это является обобщением известного факта о строении множества решений системы линейных уравнений. Это множество, как известно, представляется в виде суммы любого решения данной системы с линейным подпространством решений однородной системы линейных уравнений, порожденной данной системой. Здесь линейное подпространство выполняет роль конуса рецессивных направлений.

Доказывается также, что многогранный конус рецессивных направлений представляется в виде суммы двух множеств:

1) конечного многогранного конуса;
2) линейного подпространства, состоящего из множества решений однородной системы линейных уравнений, порождаемой данной системой линейных неравенств.

Рассматриваются особенности строения систем линейных неравенств в отдельных частных случаях.

Третья глава посвящена доказательству и систематизированному изложению многочисленных вариантов формулировок теорем об альтернативных системах линейных неравенств. Эти теоремы имеют фундаментальное значение для теории и многих приложений линейных неравенств. Их аналогом в теории систем линейных уравнений является теорема Фредгольма, которая приведена в этой главе как частный случай теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

При изложении теорем об альтернативных системах линейных неравенств в данной книге были решены две методические проблемы.

Одной из проблем является выбор исходной формулировки теоремы об альтернативных системах, которая была бы наглядна и хорошо запоминалась. Уместно отметить, что эту проблему ставил Н.Н. Астафьев в дискуссии на одной из конференций по исследованию операций в Новосибирске. Здесь в качестве отправного пункта для вывода других вариантов теоремы об альтернативных системах линейных неравенств используется геометрическая форма теоремы, предложенная в этих целях в [10].

Другой педагогической проблемой является выбор эффективного (краткого, естественного) метода доказательства. Обычно теоремы об альтернативных системах линейных неравенств (или равносильные им утверждения) доказываются через математическую индукцию [5, 9, 14, 18], что, как отмечал еще Д. Гейл [5], громоздко и ненаглядно.

Здесь приводится компактное доказательство из [10, 11], непосредственно вытекающее из условий оптимальности для классической задачи минимизации дифференцируемой выпуклой функции на линейном подпространстве.

Приводится ряд формулировок теорем об альтернативных системах линейных неравенств. Многие из этих теорем даются с указанием авторов, впервые их сформулировавших. В этом мы опираемся на монографию С.Н. Черникова [18] по линейным неравенствам и статьи Г. Бройдена [19, 20].

Важное методическое значение имеют излагаемые в главе 3 способы конструирования теорем об альтернативных системах линейных неравенств. Запоминать огромное многообразие существующих и потенциально возможных формулировок теорем нет необходимости. Важно понять приемы, которые приводят к разным формулировкам.

В четвертой главе рассматриваются две области приложения теорем об альтернативных системах линейных неравенств:

1) в качестве конструктивных критериев выявления случаев несовместности систем линейных неравенств;
2) для идентификации решений систем линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений.

Решения систем линейных неравенств (в т.ч. задач линейного программирования) с минимальным набором активных ограничений представляют интерес для многих приложений, обсуждаемых в данной книге. Вместе с тем таким решениям уделяется неоправданно мало внимания в литературе. Исторически сложилось так, что больше внимания уделяется их антиподам – решениям с максимальными наборами активных ограничений.

В данной главе излагается алгоритм внутренних точек для решения систем линейных неравенств. Этот алгоритм позволяет решать обе рассматриваемые в данной главе проблемы. В случае несовместности условий рассматриваемой системы линейных неравенств алгоритм вырабатывает относительно внутреннюю точку множества решений альтернативной системы линейных неравенств. Эта особенность позволяет не только констатировать факт несовместности исходной системы линейных неравенств, но и определить, из-за каких именно ограничений возникает эта несовместность.

Если же исходная система линейных неравенств совместна, то излагаемый алгоритм приводит к решению с минимальным набором активных ограничений – к относительно внутренней точке множества решений системы линейных неравенств.

В пятой главе на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств излагаются основные факты теории двойственности для задач линейного программирования и задачи минимизации выпуклой дифференцируемой функции при линейных ограничениях. Это демонстрирует основополагающую роль теорем об альтернативных системах линейных неравенств для теории оптимизации.

В шестой главе приводятся критерии для выявления избыточных неравенств, исключение которых не влияет на множество решений системы линейных неравенств. Приводится алгоритм внутренних точек для решения задачи линейного программирования, сочетающий в едином вычислительном процессе ввод в область допустимых решений и оптимизацию. В качестве одного из приложений данного алгоритма рассматривается задача выявления избыточных линейных неравенств.

Седьмая глава посвящена методам решения систем линейных неравенств на основе минимизации норм вектора невязок исходной и альтернативной системы линейных неравенств. На основе этих двух постановок задач безусловной минимизации кусочно-квадратичных выпуклых функций могут быть сконструированы эффективные численные методы решения или идентификации случая несовместности систем линейных неравенств. Материал данной главы базируется на введенном и развиваемом А.И. Голиковым и Ю.Г. Евтушенко «альтернативном подходе» к решению систем линейных неравенств, в том числе для поиска решения систем линейных неравенств с минимальной нормой [6, 7]. В заключении приводится алгоритм решения нелинейных систем неравенств на базе итеративной линеаризации.

При подготовке данного учебного пособия авторы опирались на фундаментальные монографии по линейным неравенствам С.Н. Черникова [18] и И.И. Еремина [9]. Здесь также отражены некоторые результаты научных исследований авторов, выполненных в рамках проекта РФФИ № 05-01-00587.

Авторы выражают благодарность Н. Н. Астафьеву, А. И. Беникову, А. И. Голикову, Ю. Г. Евтушенко, И. И. Еремину, В. А. Срочко за полезные обсуждения материалов, представленных в данном учебном пособии.

В книге используются обозначения:

R^n – n-мерное евклидово пространство;

$x^T y$ или $\langle x, y \rangle$ – скалярное произведение векторов $x \in R^n$ и $y \in R^n$;

$\varnothing$ – пустое множество;

$\in$ – принадлежит;

$\subseteq$ – включено или совпадает;

$\subset$ – строго включено;

$\nabla f(x)$ – градиент, вектор частных производных функции f от вектора $x \in R^n$;

$\nabla f_j(x) = \partial f(x)/dx_j$ – компонента $j = 1,\ldots,n$ градиента функции f в точке $x \in R^n$;

$\arg\min f(x), x \in X$ – один из элементов множества X, при котором достигается минимум функции f на этом множестве;

$\operatorname{Arg}\min f(x),\ x \in X$ – все подмножество элементов из множества X, где достигается минимум функции f на данном множестве;

$x \geq 0$ – выражение для вектора $x \in R^n$, означающее, что все его компоненты неотрицательны: $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$;

$x > 0$ – выражение для вектора $x \in R^n$, означающее, что все его компоненты положительны: $x_j > 0, j = 1, \ldots, n$;

R_+^n – множество векторов пространства R^n с неотрицательными компонентами;

$R_\oplus^n$ – множество векторов пространства R^n с положительными компонентами;

$M(x)$ – множество номеров активных ограничений в точке x, удовлетворяющей данной системе линейных неравенств,

$N(x)$ – множество номеров неактивных ограничений в точке x, удовлетворяющей данной системе линейных неравенств,

riQ – подмножество относительно внутренних точек множества $Q \subseteq R^n$.

Глава 1. Элементы линейной алгебры

Материал данной главы носит справочный характер. Здесь приводятся основные определения и исходные факты линейной алгебры, которые потребуются в дальнейшем при изложении теории и методов решения линейных неравенств.

1.1. Векторы

Обозначим R^n – множество всех n-мерных векторов, которое будем называть n-мерным пространством, где n – размерность пространства, некоторое целое положительное число. Визуально вектор $x \in R^n$ представляется как столбец вещественных чисел $x_j,\ j = 1,\dots,n,$ которые называются компонентами данного вектора. Множество вещественных чисел (их также будем называть скалярами) будем обозначать R^1 или просто R. Приведем основные, необходимые нам операции с векторами.

Умножение на скаляр. Если $x \in R^n$, λ – вещественное число, то выражение

$$y = \lambda x$$

задает вектор $y \in R^n$ с компонентами

$$y_j = \lambda x_j,\ \ j = 1,\dots n.$$

Сложение векторов. Если x и y векторы R^n, то выражение

$$z = x + y$$

задает вектор $z \in R^n$ с компонентами

$$z_j = x_j + y_j,\ \ j = 1,\dots,n.$$

Линейная комбинация векторов. Линейной комбинацией векторов $x^i \in R^n$ с весовыми коэффициентами $\lambda_i \in R,\ i = 1,\dots,t$ называется вектор

$$y = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x^i. \tag{1}$$

Аффинной комбинацией векторов является линейная комбинация (1) при условии, что

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1. \tag{2}$$

Конусной комбинацией векторов является линейная комбинация (1) при условии, что

$$\lambda_i \ge 0,\ \ i = 1,\dots,t. \tag{3}$$

Выпуклой комбинацией векторов называется линейная комбинация (1) при выполнении обоих условий (2) и (3) на весовые коэффициенты.

Пусть Q – некоторое множество векторов из R^n. **Линейной оболоч-**

кой Q будем называть множество линейных комбинаций векторов из Q. **Аффинной оболочкой** Q будем называть совокупность аффинных комбинаций векторов из Q. **Конусной оболочкой** Q будем называть множество конусных комбинаций векторов из Q. **Выпуклой оболочкой** Q будем называть множество выпуклых комбинаций векторов из Q. Множества линейных, аффинных, конусных и выпуклых комбинаций векторов из Q будем обозначать:

$$Lin(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i : q^i \in Q,\ \lambda_i \in R,\ i = 1,\dots,t \right\},$$

$$Aff(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i : q^i \in Q,\ \lambda_i \in R,\ i = 1,\dots,t,\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\},$$

$$Cone(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i : q^i \in Q,\ \lambda_i \in R, \lambda_i \ge 0,\ i = 1,\dots,t \right\},$$

$$Co(Q) = \left\{ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i : q^i \in Q, \lambda_i \in R,\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1,\dots,t,\ \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1 \right\}.$$

В этих определениях $t -$ любое натуральное число.

Операции умножения на скаляр и сложения можно распространить для множеств векторов.

Если Q – некоторое множество в R^n, λ – вещественное число, то λQ будет множеством в R^n, определяемым по правилу

$$\lambda Q = \left\{ \lambda q : q \in Q \right\}.$$

Если X и Y множества в R^n, то

$$X + Y = \left\{ z = x + y : x \in X, y \in Y \right\}$$

– множество сумм всевозможных пар векторов из X и Y.

Если x – вектор, Y – множество векторов в R^n, то

$$x + Y = \left\{ z = x + y : y \in Y \right\}$$

– множество векторов, получаемых в результате «сдвига» на вектор x множества Y.

Задание 1. *Дать геометрическую интерпретацию в двумерном случае (т. е. в пространстве R^2) операций умножения скаляра на вектор, сложения векторов, а также проиллюстрировать (на примере исходного множества Q, состоящего из одного, двух и трех векторов) понятия линейной, аффинной, конусной и выпуклой оболочек.*

Скалярное произведение векторов x и y из R^n обозначается $\langle x, y \rangle$. Оно составляет вещественную величину, определяемую по правилу

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Напомним, что векторы x, y из R^n являются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Нормой вектора $x \in R^n$ (здесь будем использовать только невзвешенную евклидову норму) является величина

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2}.$$

Расстоянием, порожденным евклидовой нормой, между векторами x, y из R^n является величина

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

1.2. Матрицы

Матрицу A размера $m \times n$ визуально можно представить в виде прямоугольной таблицы вещественных чисел с m строками и n столбцами. Элемент матрицы – вещественное число, находящееся на пересечении i-й строки и j-го столбца, будем обозначать a_{ij}, $i = 1, \ldots m$, $j = 1, \ldots, n$.

Выражение A^T обозначает матрицу, получаемую в результате операции **транспонирования** матрицы A, т.е. в результате взаимной замены строк и столбцов исходной матрицы. Матрица A^T имеет размер $n \times m$. Ее коэффициентами являются величины $a_{ji}^T = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, где a_{ij} – элементы исходной матрицы A.

Заметим, что вектор $x \in R^n$ можно считать матрицей размера $n \times 1$, т.е. имеющей n строк и 1 столбец. В результате транспонирования получим матрицу $1 \times n$, которую будем называть вектор-строкой и обозначать x^T.

Для матриц имеются операции умножения на скаляр и сложения, которые являются непосредственным обобщением одноименных операций с векторами. Обобщением скалярного произведения векторов является операция перемножения матриц.

Умножение на скаляр. Если A – матрица размера $m \times n$, λ – вещественное число, то выражение

$$B = \lambda A$$

задает матрицу B размера $m \times n$ с элементами

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A.

Сложение матриц. Если A и B – матрицы одинакового размера $m \times n$, то выражение

$$C = A + B$$

задает матрицу C того же размера $m \times n$ с элементами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \; i = 1, \ldots m, \; j = 1, \ldots, n,$$

где a_{ij}, b_{ij} – элементы матриц A и B соответственно.

Заметим, что скалярное произведение векторов x, y из R^n можно рассматривать как произведение матриц x^T и y

$$\langle x, y \rangle = x^T y.$$

Далее будем пользоваться обоими этими обозначениями скалярного произведения векторов.

Вектор с нулевыми компонентами обозначим 0. Он называется нулевым вектором или началом координат.

Набор **ортов** пространства R^n обозначим $e^j, j = 1, \ldots, n.$ Орт e^j имеет j-ю компоненту, равную единице, а остальные $(n-1)$ компонент, равные нулю.

Векторы $x^i \in R^n, i = 1, \ldots, t$ при $t \geq 2$ называются **линейно зависимыми**, если хотя бы один из них выражается в виде линейной комбинации других. Векторы $x^i,\ i = 1, \ldots, t,\ t \geq 2$ будут **линейно независимыми**, если ни один из них не выражается в виде линейной комбинации других.

Пусть Q – некоторое множество векторов в R^n. Набор векторов $x^i \in Q,\ i = 1, \ldots, t$ называется **максимальным набором линейно независимых векторов** из Q, если эти векторы линейно независимы и дополнение к ним любого вектора из Q приводит к линейно-зависимому набору векторов.

Задание 2*. Доказать, что у любого максимального набора линейно независимых векторов множества* $Q \subseteq R^n$ *одно и то же число этих векторов.*

Столбцы матрицы A можно рассматривать как набор векторов. Число векторов в максимальном наборе линейно независимых столбцов матрицы A называется **рангом матрицы** и обозначается $rank\, A$.

1.3. Линейные подпространства и однородные системы линейных уравнений

Линейное подпространство. Подмножество S векторов пространства R^n, замкнутое относительно операции взятия линейной комбинации, называется линейным подпространством. Другими словами, множество $S \subseteq R^n$ будет линейным подпространством, если для любых векторов $x^1, x^2 \in S$ и любых вещественных чисел λ_1, λ_2 вектор

$$y = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$$

будет находиться в S. Максимальный набор линейно независимых векторов линейного подпространства S называется **базисом** этого подпространства. Число векторов в максимальном наборе линейно независимых векторов линейного подпространства будем называть **размерностью** этого подпространства. Размерность линейного подпространства будем обозначать $\dim S$.

Задание 3. *Доказать, что линейная оболочка любого множества векторов из* R^n *будет линейным подпространством.*

Задание 4. *Доказать, что линейная оболочка базиса линейного подпространства совпадает с линейным подпространством.*

Задание 5. *Доказать равенство*

$$rank\, A = rank\, A^T,$$

которое можно интерпретировать как совпадение числа максимального набора линейно независимых столбцов с числом максимального набора линейно независимых строк любой матрицы.

Задание 6. *Пусть* A *– матрица размера* $m \times n$. *Доказать, что*

$$rank\, A \le \min\{m, n\}.$$

Пересечение всех линейных подпространств, содержащих данное множество Q, называется **минимальным линейным подпространством, содержащим** Q.

Задание 7. *Доказать, что минимальное линейное многообразие, содержащее данное множество* Q, *совпадает с линейной оболочкой* Q.

Область значений матрицы. Пусть D – матрица размера $n \times k$. Умножение этой матрицы на любой вектор v из R^k дает вектор Dv из R^n. Используя разные значения вектора v из R^k, получим множество векторов из R^n

$$S = \{x = Dv:\ v \in R^k\}, \tag{4}$$

которое называется областью значений матрицы D.

Задание 8. *Доказать, что область значений матрицы является линейным подпространством. Причем максимальный набор линейно независимых столбцов матрицы составляет базис этого подпространства.*

Справедливо и обратное: любое линейное подпространство можно представить в виде области значений некоторой матрицы. Действительно, если столбцы матрицы D состоят из векторов, образующих базис линейного подпространства, то, согласно заданию 4, область значений матрицы D совпадает с этим подпространством.

Однородная система линейных уравнений. Пусть A – матрица размера $m \times n$. Рассмотрим задачу поиска вектора $x \in R^n$, при котором

$$Ax = 0. \tag{5}$$

Условие (5) называется системой линейных однородных уравнений. Она содержит n переменных и m уравнений. Систему (5) можно представить в таком виде: найти значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ i = 1, \ldots m,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A. Система (5) имеет очевидное тривиальное решение $x = 0$.

Для дальнейшего особый интерес представляет множество всех решений системы (5)

$$S = \{x \in R^n : Ax = 0\}. \tag{6}$$

Задание 9*. Доказать, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством.*

Определяемое по правилу (6) линейное подпространство называется **нуль-пространством** или **ядром** матрицы A.

Ортогональные линейные подпространства. Пусть S – некоторое множество векторов в R^n. Обозначим

$$S^{\perp} = \{x \in R^n : x^T y = 0\ \forall y \in S\}$$

ортогональное дополнение к S. Оно состоит из векторов R^n, ортогональных всем векторам S. Особый интерес далее будет представлять случай, когда исходное множество S является линейным подпространством.

Задание 10*. Доказать утверждения:*

1) *ортогональное дополнение (вообще говоря, к любому множеству из R^n) является линейным подпространством,*
2) *ортогональное дополнение к ортогональному дополнению линейного подпространства S совпадает с исходным подпространством*
$$(S^{\perp})^{\perp} = S,$$
3) *обоим линейным подпространствам S и $S^{\perp}$ принадлежит только начало координат*
$$S \cap S^{\perp} = 0,$$
4) *сумма векторов из линейных подпространств S и $S^{\perp}$ составляет все исходное пространство*
$$S + S^{\perp} = R^n,$$
5) *если S – линейное подпространство, то для любого $x \in R^n$ существуют единственные $y \in S, z \in S^{\perp}$, при которых*
$$x = y + z. \tag{7}$$

В выражении (7) вектор y является проекцией вектора x на линейное подпространство S, т.е. это наименее удаленный от x вектор из S

$$y = \arg\min\left\{\rho(x, p) : p \in S\right\}.$$

Вектор z в выражении (7) является проекцией вектора x на линейное подпространство $S^{\perp}$.

Проекцией множества Q из R^n на линейное многообразие S будем называть множество проекций на S всех векторов из Q.

Поскольку линейные подпространства S и $S^{\perp}$ симметричны по свойствам, то их будем называть взаимно ортогональными (или просто ортогональными) линейными подпространствами.

Алгебраическая форма задания ортогональных подпространств. Любая матрица A размера $m \times n$ при любом натуральном m порождает в R^n два взаимно-ортогональных линейных подпространства: нуль-пространство A и область значений транспонированной матрицы A^T:

$$S = \{x \in R^n : Ax = 0\}, \tag{8}$$

$$S^{\perp} = \{x = A^T u : u \in R^m\}. \tag{9}$$

Задание 11. *Доказать, что, действительно, нуль-пространство любой матрицы и область значений транспонированной к ней матрицы порождают взаимно ортогональные подпространства. На основе этого доказать, что любое линейное подпространство можно представить в виде нуль-пространства некоторой матрицы.*

В приведенных выше утверждениях следует выделить два момента. Во-первых, любая матрица по правилам (8), (9) порождает взаимно ортогональные подпространства. Во-вторых, любым взаимно ортогональным подпространствам можно поставить в соответствие некоторую матрицу (неединственную), порождающую эти подпространства.

Исходное подпространство S можно было определить не только как нуль-пространство матрицы A, но и как линейную оболочку столбцов некоторой матрицы, как это было сделано в (4). Тогда

$$S = \{x = Dv : v \in R^k\}, \tag{10}$$

$$S^{\perp} = \{x \in R^n : D^T x = 0\}. \tag{11}$$

Пример 1. Само пространство R^n является линейным подпространством. В качестве ортогонального дополнения к R^n служит пространство, состоящее из одного нулевого вектора, имеющее нулевую размерность.

Пример 2. На рис. 1 приведен пример двух взаимно ортогональных линейных подпространств в R^2. Здесь

$$S = \{x \in R^2 : x_1 - x_2 = 0\},$$

$$S^{\perp} = \left\{x \in R^2 : x_1 = v_1, x_2 = -v, v \in R\right\}.$$

В данном случае подпространство S определяется как нуль-пространство матрицы

$$A = [1, -1],$$

имеющей размер 1×2. Подпространство $S^{\perp}$ определено как образ матрицы A^T.

Данные подпространства можно также определять следующим образом

$$S = \{x \in R^1 : x_1 = v, x_2 = v, v \in R\},$$

$$S^{\perp} = \left\{ x \in R^2 : x_1 + x_2 = 0 \right\}.$$

В этом представлении подпространство $S^{\perp}$ является нуль-пространством матрицы

$$D = \left[1, 1 \right],$$

состоящей из одной строки и двух столбцов. Пространство S является образом матрицы D^T.

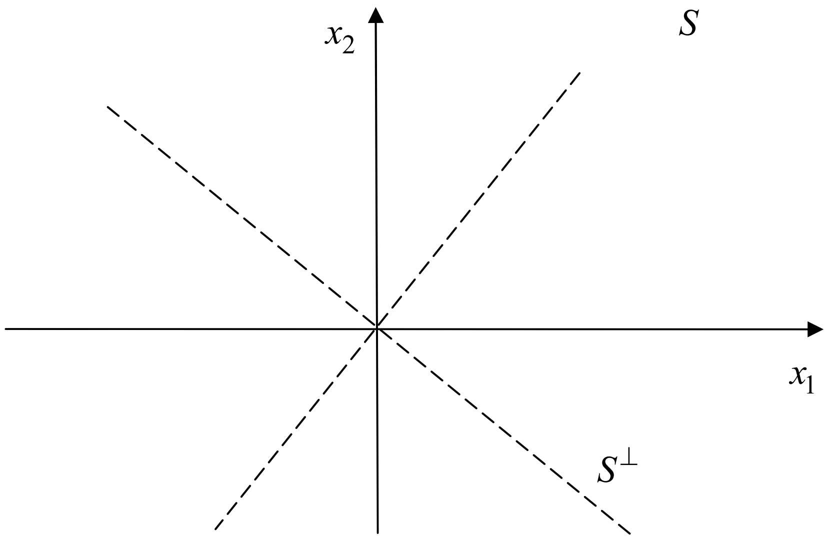

Рис.1. Пример одномерных взаимно-ортогональных линейных подпространств S и $S^{\perp}$ двумерного пространства. Прямые, соответствующие множествам S и $S^{\perp}$ проходят через начало координат и перпендикулярны друг другу.

1.4. Линейные многообразия и системы линейных уравнений

Линейное многообразие. Подмножество L векторов пространства R^n, замкнутое относительно операции взятия аффинной комбинации, называется линейным многообразием. Итак, множество $L \subseteq R^n$ будет линейным многообразием, если для любых векторов $x^1, x^2 \in L$ при любом вещественном λ вектор

$$y = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$$

будет находиться в L.

Задание 12. *Доказать, что аффинная оболочка любого множества векторов R^n будет линейным многообразием в R^n.*

Задание 13. *Доказать, что пересечение двух линейных многообразий в R^n будет линейным многообразием.*

Задание 14. *Доказать, что если* L *– линейное многообразие в* R^n, $y \in L$, *то множество*

$$S = L - y \tag{12}$$

будет линейным подпространством в R^n.

Получаемое по правилу (12) линейное подпространство называется **линейным подпространством, параллельным линейному многообразию** L. **Размерностью линейного многообразия** L называется число, равное размерности линейного подпространства, параллельного L. Размерность линейного многообразия L будем обозначать $\dim L$.

Отметим, что не любое линейное многообразие является линейным подпространством. Линейное многообразие будет линейным подпространством в том и только том случае, если ему принадлежит начало координат, вектор 0. Линейным подпространством, параллельным линейному многообразию L, в случае, когда это многообразие является подпространством, является само множество L.

Пересечение всех линейных многообразий, содержащих данное множество $Q \in R^n$, называется минимальным линейным многообразием, содержащим данное множество Q.

Задание 15. *Доказать, что минимальное линейное многообразие, содержащее данное множество* Q, *совпадает с аффинной оболочкой множества* Q, *с множеством* $Aff(Q)$.

Из (12) следует, что любое линейное многообразие L можно рассматривать как сдвиг на некоторый вектор y некоторого линейного подпространства S

$$L = S + y. \tag{13}$$

Из рассмотренных ранее двух алгебраических форм задания линейного подпространства получаем две алгебраические формы задания линейного многообразия.

Линейное многообразие, задаваемое в виде сдвига линейной оболочки конечного набора векторов. Из (10), (13) следует, что для любого линейного многообразия в R^n найдутся вектор $y \in R^n$ и матрица D размера $n \times k$ при некотором k, такие что

$$L = \{y + Dv : v \in R^k\}. \tag{14}$$

Линейное многообразие, задаваемое в виде множества решений системы линейных уравнений. Из (8), (13) следует, что для любого линейного многообразия L из R^n найдутся вектор $y \in L$ и матрица A размера $m \times n$ при некотором m, такие что

$$L = \{x = y + z : Az = 0\}. \tag{15}$$

Введем вектор

$$b = Ay. \tag{16}$$

Тогда (15) будет равносильно следующему определению линейного многообразия

$$L = \{x \in R^n : Ax = b\}. \qquad (17)$$

Итак, показано, что любое линейное многообразие можно представить как множество решений некоторой системы линейных уравнений.

Справедливо и обратное утверждение: множество решений любой совместной системы линейных уравнений образует линейное многообразие.

Задание 16. *Пусть заданы матрица A размера $m \times n$ и вектор $b \in R^m$. Рассматривается задача поиска решения системы линейных уравнений*

$$Ax = b. \qquad (18)$$

Доказать, что либо данная задача не имеет решения, либо имеет множество решений, образующее линейное многообразие в R^n.

Следует отметить, что линейное многообразие будет линейным подпространством, если в представлении (13) $y \in S$, в том числе, если $y = 0$. Это означает, что в представлении (14) вектор y находится в линейной оболочке столбцов матрицы D, т.е. $y = Du$ при некотором $u \in R^k$. При представлении линейного многообразия в виде (17) его совпадение с линейным подпространством возможно в том и только том случае, если $b = 0$.

В предыдущем разделе рассматривалась система линейных уравнений вида (18) при $b = 0$. Такая система была названа однородной системой линейных уравнений. Если вектор x является решением такой системы, то при любом λ вектор λx также будет ее решением.

Неоднородной системой линейных уравнений или системой линейных уравнений общего вида, а также (по умолчанию) просто системой линейных уравнений будем называть систему вида (18), у которой вектор b правой части может быть ненулевым, хотя и не исключается случай $b = 0$. Если рассматривается именно случай $b \neq 0$, то он должен оговариваться.

Систему уравнений

$$Ax = 0$$

будем называть **однородной системой линейных уравнений, порождаемой исходной системой** (18).

Из (15), (16) следует, что множество решений любой системы линейных уравнений можно представить в виде сдвига на вектор, являющийся одним из решений данной системы, множества решений однородной системы, порождаемой данной.

Пример 3. На рис. 2 графически представлено линейное многообразие L в R^2, составляющее множество решений уравнения

$$x_1 - x_2 = -1.$$

Параллельное ему линейное подпространство S состоит из векторов R^2, являющихся решением уравнения

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Многообразие L можно рассматривать как сдвиг подпространства S на вектор

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

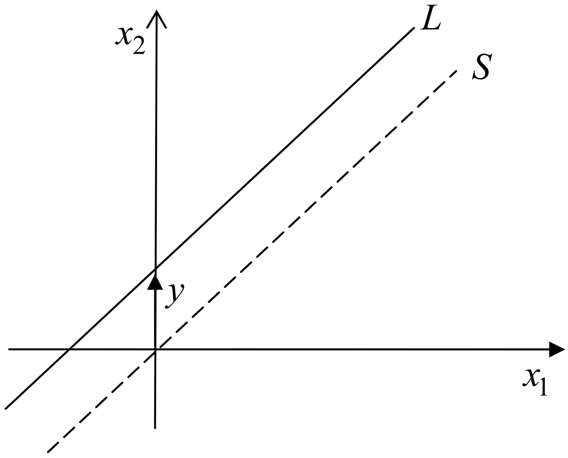

Рис. 2. Линейное многообразие L и параллельное ему линейное подпространство S двухмерного пространства. Здесь y – один из векторов сдвига линейного подпространства S в линейное многообразие L.

1.5. Выпуклые множества

Линейные многообразия в R^n размерности 0, 1, 2 и $n-1$ называют соответственно точками (векторами), прямыми, плоскостями и гиперплоскостями.

Линейное многообразие нулевой размерности состоит из одного вектора. Каждый вектор геометрически можно рассматривать как точку в n-мерном пространстве.

Аффинные комбинации двух несовпадающих точек x и y из R^n образуют **прямую**

$$P = \{\lambda x + (1-\lambda) y : \lambda \in R\},$$

являющуюся одномерным линейным многообразием. Выпуклые комбинации этих точек составляют **отрезок** – часть прямой, заключенную между этими точками

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Лучом, выходящим из точки $x \in R^n$ в направлении $z \in R^n$, называется множество точек

$$L(x, z) = \{x + tz : t \ge 0\}.$$

Отметим, что введенная выше прямая, состоит из двух лучей $L(x,z)$ и $L(x,-z)$ при $z=y-x$.

Особое выделение двумерных линейных многообразий – плоскостей – связано с удобством изображения: лист, бумагу или доску можно представить как фрагмент двухмерного линейного многообразия. Многие факты линейной алгебры принято в иллюстративных целях изображать в двухмерных линейных многообразиях (в т.ч. в двухмерных линейных подпространствах).

Гиперплоскости играют роль, двойственную точкам. **Гиперплоскость** состоит из множества решений одного линейного уравнения. В трехмерном пространстве (т. е. при $n=3$) гиперплоскости являются плоскостями.

Задание 17. *Доказать, что любое линейное многообразие можно представить в виде пересечения конечного числа гиперплоскостей. Причем минимально требуемое для этого число гиперплоскостей равно $n-r$, где r – размерность линейного многообразия.*

Задание 18. *Пусть гиперплоскость определена в виде множества решений линейного уравнения*

$$H=\{x\in R^n:\langle a,x\rangle=\beta\} \tag{19}$$

при заданных $a\in R^n$, $a\neq 0$, $\beta\in R$.

Доказать, что ортогональным дополнением к H будет прямая, проходящая через вектор a и начало координат

$$P=\{\lambda a:\lambda\in R\}.$$

Множество Q из R^n называется **выпуклым**, если оно содержит весь отрезок между любыми двумя точками этого множества.

Задание 19. *Доказать, что множество $Q\subset R^n$ будет выпуклым в том и только том случае, если оно совпадает со своей выпуклой оболочкой, т.е. если и только если*

$$CoQ=Q.$$

Задание 20. *Доказать, что любое линейное многообразие (и, следовательно, любое линейное подпространство) является выпуклым множеством.*

Размерностью выпуклого множества Q из R^n будем называть размерность его аффинной оболочки. Полагаем

$$\dim Q=\dim Aff(Q).$$

Для заданных $a\in R^n$, $a\neq 0$, $\beta\in R$ множества векторов

$$H_0^+=\{x\in R^n:\langle a,x\rangle>\beta\},$$

$$H^+=\{x\in R^n:\langle a,x\rangle\geq\beta\}, \tag{20}$$

называются соответственно **открытым** и **замкнутым полупространствами**, порождаемыми гиперплоскостью H, определяемой при данных a,β условием (19). Далее замкнутое полупространство будем обычно называть просто полупространством. Открытое полупространство всегда будем особо оговаривать.

Открытыми и замкнутыми полупространствами, порождаемыми гиперплоскостью H, будут также множества

$$H_0^- = \{x \in R^n : \langle a, x \rangle < \beta\},$$
$$H^- = \{x \in R^n : \langle a, x \rangle \le \beta\}. \qquad (21)$$

Задание 21. *Убедитесь, что гиперплоскость H разбивает все пространство R^n на два непересекающиеся открытое и замкнутое полупространства двумя способами:*

$$R^n = H^+ \bigcup H_0^-, \quad H^+ \bigcap H_0^- = \emptyset;$$
$$R^n = H^- \bigcup H_0^+, \quad H^- \bigcap H_0^+ = \emptyset.$$

Множество векторов R^n, представимое в виде пересечения конечного числа полупространств, называется полиэдральным выпуклым множеством или, кратко, **полиэдром**, а также, иногда, **многогранным множеством**. Подчеркнем, что в данном определении под полупространством понимается замкнутое полупространство.

Задание 22. *Доказать, что любой полиэдр является выпуклым множеством.*

Заметим, что любую гиперплоскость можно представить в виде пересечения двух полупространств, ее порождающих. Из (20)–(21) следует

$$H = H^+ \bigcap H^-.$$

Поэтому любая гиперплоскость является выпуклым полиэдром.

Задание 23. *Доказать, что любое линейное многообразие является полиэдром.*

1.6. Конусы

Множество Q из R^n называется **конусом**, если при любом $\lambda > 0$

$$\lambda Q = Q.$$

Если при этом $0 \notin Q$, то множество Q будет называться **тупым конусом**. Если $0 \in Q$, то конус Q будем называть **заостренным** или просто конусом. Всегда оговариваться будет только тупой конус.

Выпуклым конусом (заостренным или тупым) будем называть конус (заостренный или соответственно тупой), являющийся выпуклым множеством.

Задание 24. *Доказать, что множество Q из R^n будет выпуклым конусом в том и только том случае, если это множество совпадает со своей конусной оболочкой, т.е. если и только если*

$$Cone(Q) = Q.$$

Множество Q называется **многогранным конусом**, если оно является конусной оболочкой конечного числа векторов в R^n, т.е. если существуют векторы $a^i \in R^n$, $i = 1, \ldots, t$ при некотором t, такие что

$$Q = Cone\{a^i,\ i = 1, \ldots, t\}.$$

Выпуклый конус размерности 1 является лучом, выходящим из начала координат. Пусть z – вектор R^n, тогда луч, выходящий из начала координат, образованный этим вектором, составляет множество

$$P_+(z) = \{\lambda z : \lambda \geq 0\}.$$

Отметим, что $P_+(z) = L(0, z)$.

Задание 25. *Доказать, что многогранный конус является выпуклой оболочкой конечного числа лучей, выходящих из начала координат.*

Важным примером многогранного конуса является множество векторов R^n с неотрицательными всеми компонентами. Это множество обозначим

$$R^n_+ = \{x \in R^n :\ x \geq 0\}.$$

Образующими этот конус является набор орт e^j, $j = 1, \ldots, n$.

Множество векторов с положительными всеми компонентами, которое обозначим

$$R^n_\oplus = \{x \in R^n : x > 0\},$$

является выпуклым, но не многогранным конусом.

Выше и далее выражения $x \geq 0$ и $x > 0$ для $x \in R^n$ означают, что у вектора x все компоненты неотрицательные $x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$ и, соответственно, все компоненты положительные $x_j > 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Аналогичным образом интерпретируются обратные неравенства $x \leq 0,\ x < 0$. Выражения $x \geq y,\ x > y$ для двух векторов из R^n означают, что $x - y \geq 0,\ \ x - y > 0$.

Множество Q будем называть **конечным многогранным конусом**, если это множество является многогранным конусом и может быть представлено в виде конусной оболочки конечного набора векторов, каждый из которых не представим в виде выпуклой комбинации двух отличных от него векторов из этого же конуса. Такие векторы будем называть **векторами, образующими конечный многогранный конус**.

Отметим, что множество, состоящее из одного нулевого вектора в R^n, является, согласно приведенным выше определениям, конечным многогранным конусом. Вместе с тем оно не является тупым конусом и, следовательно, тупым многогранным конусом.

Задание 26. *Доказать, что множество* R^n_+ *является конечным многогранным конусом.*

Задание 27*. Доказать, что любое линейное подпространство является многогранным конусом, но не является конечным многогранным конусом.*

1.7. Ограниченные множества

Множество X из R^n называется **ограниченным**, если норма любого вектора из X не превышает некоторой вещественной величины, т.е. существует $M > 0$

$$\|x\| \le M \quad \forall x \in X.$$

Если для любого вещественного $M > 0$ существует $x \in X$ такой, что

$$\|x\| > M,$$

то множество X является неограниченным.

Выпуклая оболочка конечного числа векторов R^n называется **политопом**. Пусть x^τ, $\tau = 1, \ldots, t$ – некоторый набор векторов R^n. Политоп, образуемый этими векторами, является множеством

$$X = \{x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i x^i : \sum_{i=1}^{t} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, t\}.$$

Задание 28*. Доказать, что любой конус, содержащий ненулевой вектор, является неограниченным множеством.*

Задание 29*. Доказать, что любой политоп является ограниченным множеством.*

Задание 30*. Доказать, что любой политоп можно представить в виде выпуклой оболочки конечного числа векторов, каждый из которых не является выпуклой комбинацией двух разных векторов из этого политопа.*

Для выпуклого множества Q совокупность векторов

$$W = \left\{ y \in R^n : Q + y = Q \right\}, \tag{22}$$

будем называть **конусом рецессивных направлений**.

Задание 31*. Доказать, что конус рецессивных направлений выпуклого множества является конусом.*

Задание 32*. Доказать, что выпуклое множество Q будет ограниченным в том случае, если его конус рецессивных направлений состоит только из нулевого вектора, т.е. если*

$$W = \{0\}.$$

Вопросы и задачи к главе 1

1. Являются ли линейным подпространством все векторы n-мерного векторного пространства, компоненты которых – целые числа?
2. Являются ли линейным подпространством все векторы плоскости, лежащие на данной прямой?
3. Являются ли линейным подпространством все векторы из R^n, компоненты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$?
4. Является ли множество $X = \left\{x \in R^n : Ax \le b\right\}$, где A – матрица размера $m \times n$, b – вектор R^m, выпуклым? Обосновать свой ответ. Что будет конусом рецессивных направлений этого множества?
5. Доказать, что сумма двух линейных подпространств будет линейным подпространством.
6. Доказать, что пересечение двух линейных подпространств будет линейным подпространством.
7. Доказать, что для двух линейных подпространств S_1 и S_2 пространства R^n справедливы соотношения:

   1) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \bigcap S_2^\perp$;

   2) $(S_1 \bigcap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$.
8. Линейное подпространство S в R^4 задано как множество решений системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,\\
&3x_1 + 2x_2 \quad\;\; - 2x_4 = 0,\\
&3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0.
\end{aligned}$$

Сформировать систему линейных уравнений, множество решений которой является линейным подпространством $S^\perp$.

9. Доказать, что любую прямую в R^n можно представить в виде пересечения $(n-1)$-й гиперплоскости.

10. Пусть множество $H \subset R^3$ состоит из решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 4$. Определить ортогональное дополнение $H^{\perp}$.

11. Доказать, что множество решений системы уравнений и неравенств $Ax = 0, x \geq 0$, где A – матрица размера $m \times n$, $x \in R^n$ является конечным многогранным конусом.

12. Определить конус рецессивных направлений для множества векторов $x \in R^n$, удовлетворяющих условию $Ax \leq b$, где A – матрица размера $m \times n$.

13. Доказать, что множество векторов R^3, удовлетворяющих неравенству

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 \leq 0$$

является выпуклым, но не многогранным конусом.

Глава 2. Строение полиэдров

В данной главе исследуется структура множества решений системы линейных неравенств. Описание строения множества решений будем осуществлять поэтапно – от частных случаев к более общим. Такой подход удобен для облегчения восприятия результатов и для доказательств. При доказательстве теорем о строении множества решений системы линейных неравенств в более общих случаях будем опираться на факты, установленные для частных случаев.

В разделах 2.3–2.5 подробно рассматриваются системы линейных неравенств полного ранга, когда все векторы-столбцы матрицы ограничений линейно независимы. Такие системы линейных неравенств обладают двумя важными особенностями. Во-первых, только у таких систем конус рецессивных направлений является «острым» – если этому конусу принадлежит вектор $z \neq 0$, то заведомо вектор $-z$ не принадлежит этому конусу. Во-вторых, только у таких систем имеется конечное число решений с максимальными наборами активных ограничений. Причем любое из этих двух свойств является определяющим – его наличие означает, что данная система имеет полный ранг.

В разделе 2.4 исследуется структура множества решений системы линейных неравенств, когда отсутствуют ненулевые рецессивные направления, т.е. когда конус рецессивных направлений состоит только из нулевого вектора. В этом случае множество решений системы линейных неравенств будет ограниченным. Оно, как будет доказано, является политопом, представимом в виде выпуклой оболочки решений с максимальным набором активных ограничений.

Затем в разделе 2.5 завершим изучение случая систем линейных неравенств полного ранга. Будет доказано, что множество решений таких систем является суммой двух множеств – выпуклой оболочки решений с максимальным набором активных ограничений и конуса рецессивных направлений. Причем в этом случае рецессивные направления будут составлять конечный многогранный конус.

Наконец, в разделе 2.6 будет рассмотрен общий случай, когда не исключается возможность линейной зависимости столбцов матрицы ограничений. В этом случае в конус рецессивных направлений наряду с вектором $z \neq 0$ может входить вектор $-z$. Совокупность таких векторов образует некоторое линейное подпространство S. Это будет нуль-пространство матрицы ограничений системы линейных неравенств.

В общем случае, как будет доказано в 2.6, множество решений систем линейных неравенств представимо в виде суммы трех множеств: политопа, конечного многогранного конуса и линейного подпространства. Причем сумма данного конечного многогранного конуса и линейного подпространства образует конус рецессивных направлений множества решений системы линейных неравенств.

Если подпространство состоит только из нулевого вектора, то имеем рассматриваемый в разделе 2.5 случай. В этой ситуации при представлении множества решений системы линейных неравенств политоп и конечный многогранный конус задаются однозначно.

Если же подпространство имеет ненулевую размерность, то политоп и конечный многогранный конус в описании множества решений системы линейных неравенств задаются неоднозначно. Так, если к образующим конечного многогранного конуса добавлять любые вектора из подпространства, то конусная оболочка полученного набора векторов может также служить в качестве конечного многогранного конуса.

2.1. Исходные определения

Объектом изучения в данной главе будет система линейных неравенств

$$Ax \geq b. \tag{1}$$

Заданными являются матрица A размера $m \times n$ с элементами $a_{ij}, i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, n$ и вектор $b \in R^m$. Искомые переменные составляют вектор $x \in R^n$.

Множество решений системы (1) обозначим

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq b\}.$$

Это множество в предыдущей главе было названо полиэдром.

В данной главе, не оговаривая особо, будем считать, что система (1) совместная, т.е.

$$X \neq \emptyset.$$

Свойства несовместных систем, способы их идентификации будут изучаться позже, в частности в главах 4 и 7.

Пусть $\tilde{a}^i$ – вектор R^n, образованный из элементов i-ой строки матрицы A

$$\tilde{a}^i_j = a_{ij}, \;\; j = 1, \dots, n, \;\; i = 1, \dots, m.$$

Тогда систему (1) можно записать в таком виде:

$$\left\langle \tilde{a}^i, x \right\rangle \geq b_i, \;\; i = 1, \dots, m.$$

Далее, не оговаривая особо, будем считать, что все строки матрицы A ненулевые

$$\tilde{a}^i \neq 0, \;\; i = 1, \dots, m.$$

Определим взаимно ортогональные подпространства – образ матрицы A^T и нуль-пространство A

$$S^{\perp} = \{x = A^T u : u \in R^m\}, \tag{2}$$

$$S = \{x \in R^n : Ax = 0\}. \qquad (3)$$

Рангом системы линейных неравенств (1) будем называть максимальное число линейно независимых строк матрицы A, т.е. векторов $\tilde{a}^i$. Это число обозначим r. Оно является рангом матрицы A и размерностью линейного подпространства $S^\perp$

$$r = \dim S^\perp.$$

Следовательно,

$$n - r = \dim S.$$

Ранг системы линейных неравенств не может превышать числа ее переменных, т.е.

$$r \le \min\{m, n\} \le n.$$

В случае

$$r = n$$

имеем **систему линейных неравенств максимального ранга**. Ее также можно назвать системой линейных неравенств **полного ранга**. Отметим, что в случае системы линейных неравенств (1) полного ранга имеем $S^\perp = R^n$ и выполнение неравенства $n \le m$.

Если $b = 0$, то система линейных неравенств (1) является **однородной**. Если $b \ne 0$, то (1) будет **неоднородной** системой линейных неравенств.

В общем случае, при любом значении вектора b, условие

$$Ax \ge 0 \qquad (4)$$

называется **однородной системой линейных неравенств, порождаемой системой (1)**. Множество решений системы (4) обозначим

$$W = \{x \in R^n : Ax \ge 0\}. \qquad (5)$$

Задание 1. *Доказать, что множество решений однородной системы линейных неравенств образует выпуклый конус.*

Задание 2. *Доказать, что*

$$X + W = X.$$

Это свойство означает, что прибавление к произвольному вектору $x \in X$ любого вектора $y \in W$ дает вектор $x + y$, также являющийся решением системы (1). Сформулированное в задании 2 свойство означает, что определяемое в (5) множество содержится в конусе рецессивных направлений множества X. На самом деле справедливо более сильное утверждение.

Задание 3. *Доказать, что определенное в (5) множество W является конусом рецессивных направлений для множества решений системы неравенств (1), т.е. для множества W, определяемого условием (5), выполняется условие (1.22) при $X = Q$.*

Для решения $x \in X$ множество номеров **активных ограничений** обозначим

$$M(x) = \{i : \langle \tilde{a}^i, x \rangle = b_i\}. \qquad (6)$$

Множество номеров **неактивных** ограничений обозначим

$$N(x) = \{i : \langle \tilde{a}^i, x \rangle > b_i\}.$$

Введем вектор R^m, зависящий от вектора $x \in R^n$

$$r(x) = Ax - b. \tag{7}$$

Отметим, что для $x \in X$

$$r(x) \geq 0,$$
$$r_i(x) = 0, \ \ i \in M(x),$$
$$r_i(x) > 0, \ \ i \in N(x).$$

Лемма 1. *Если $x \in X$, $y \in X$, то для вектора*

$$\tilde{x} = \lambda x + (1 - \lambda) y \tag{8}$$

при

$$\lambda \in (0,1) \tag{9}$$

справедливы соотношения

$$M(\tilde{x}) = M(x) \bigcap M(y), \tag{10}$$

$$N(\tilde{x}) = N(x) \bigcup N(y). \tag{11}$$

Доказательство. Из (7), (8) следует, что

$$r(\tilde{x}) = \lambda r(x) + (1 - \lambda) r(y). \tag{12}$$

Действительно,

$$A(\lambda x + (1 - \lambda) y) - b = (A(\lambda x) - \lambda b) + A((1 - \lambda) y) - (1 - \lambda) b =$$
$$= \lambda (Ax - b) + (1 - \lambda)(Ay - b).$$

Согласно (9)

$$\lambda > 0, \ \ (1 - \lambda) > 0. \tag{13}$$

Из условий $x \in X$, $y \in Y$ следует, что

$$r(x) \geq 0, \ \ r(y) \geq 0$$

и в силу (12)

$$r(\tilde{x}) \geq 0,$$

т. е. $\tilde{x} \in X$.

При этом из (12), (13) следует, что $r_i(\tilde{x}) = 0$ для некоторого номера ограничения i в том и только том случае, если $r_i(x) = 0$ и $r_i(y) = 0$, что дает соотношение (10). Если хотя бы одна из величин $r_i(x)$ или $r_i(y)$ больше нуля (вторая может равняться нулю или быть положительной), то, согласно (12), (13) $r_i(\tilde{x}) > 0$. Это дает соотношение (11).

Лемма 1 доказана.

Вектор $x \in X$ будет **решением системы линейных неравенств (1) с максимальным набором активных ограничений**, если не существует вектора $y \in X$, все активные ограничения которого являются активными ограничениями для x и при этом хотя бы одно активное ограничение у решения y не является активным для решения x, т.е.

$$M(x) \subset M(y). \tag{14}$$

Отметим, что решение с максимальным набором активных ограничений можно также назвать **решением с минимальным набором неактивных ограничений**. Для такого решения $x \in X$ не существует вектора $y \in X$, при котором

$$N(y) \subset N(x).$$

Это соотношение равносильно (14).

Задание 4. *Доказать, что у любой совместной системы линейных неравенств имеются решения с максимальным набором активных ограничений.*

Вектор $x \in X$ будем называть **решением системы (1) с минимальным набором активных ограничений**, если активные ограничения у этой системы являются активными ограничениями для любого другого решения из X, т.е. если для любого $y \in X$

$$M(x) \subseteq M(y). \tag{15}$$

Отметим, что решение с минимальным набором активных ограничений является одновременно решением с **максимальным набором неактивных ограничений**, т.е. таким, что при любом $y \in X$

$$N(y) \subseteq N(x).$$

Это соотношение равносильно (15).

Задание 5. *Доказать, что у совместной системы линейных неравенств имеются решения с минимальным набором активных ограничений и все такие решения имеют один и тот же набор активных ограничений.*

Задание 6. *Доказать, что у системы линейных неравенств имеется единственное решение с минимальным набором активных ограничений в том и только том случае, если множество решений состоит из одного вектора.*

Пример 1. На рис. 3 представлено множество решений системы линейных неравенств

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Множество решений данной системы является заштрихованной областью. На рис. 3 точке x соответствует орт e^2. Для этой точки активными являются два ограничения $M(x) = \{1,2\}$ (с номерами 1 и 2). Для точки y активным является одно ограничение, $M(y) = \{3\}$. Множества номеров активных ограничений этих двух точек не пересекаются. Поэтому для точки $\tilde{x}$, находящейся внутри отрезка, т.е. между x и y, все ограничения неактивные: $M(\tilde{x}) = \varnothing$. Это иллюстрирует утверждение леммы 1 и используемый в ней метод доказательства.

У системы неравенств (16) имеются два решения с максимальным набором активных ограничений – орты

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждого из этих векторов два из трех условий-неравенств (16) выполняются в виде равенств.

Вся внутренность заштрихованной области состоит из решений данной системы с минимальным набором активных ограничений. В данном примере этот минимальный набор активных ограничений будет пустым множеством – для всех решений внутри заштрихованной области все три неравенства выполняются в строгой форме.

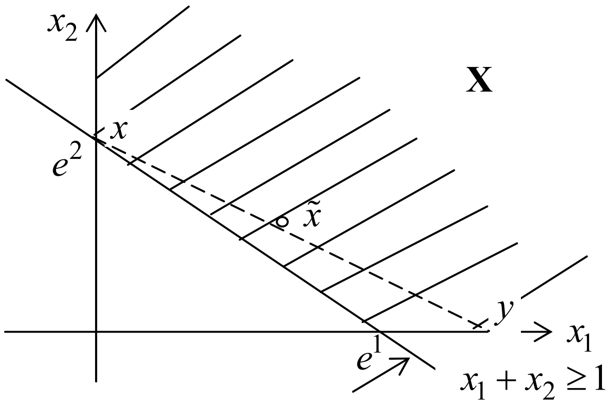

Рис. 3 Множество допустимых решений системы линейных неравенств (16) составляет заштрихованную область. Вся внутренность заштрихованной области состоит из решений данной системы с минимальным набором активных ограничений. Векторы e^1, e^2 *– решения системы (16) с максимальными наборами активных ограничений.*

2.2. Максимальный шаг движения по заданному направлению, не выводящий из множества решений системы линейных неравенств

Пусть $x \in X$, $z \in R^n$, $z \neq 0$. Обозначим $\lambda(x,z)$ – максимальную вещественную величину $\lambda \in R$, при которой вектор $x + \lambda z$ принадлежит X, т.е. $x + \lambda z \in X$ при $\lambda = \lambda(x,z)$ и $x + \lambda z \notin X$ при любом $\lambda > \lambda(x,z)$.

Если $x + \lambda z \in X$ при любом $\lambda > 0$, то полагаем $\lambda(x,z) = \infty$. Во всех случаях $\lambda(x,z) \geq 0$.

Величину $\lambda(x,z)$ будем называть максимальным шагом движения из точки x по направлению z в области X.

Отметим, что условие

$$\lambda(x,z) \neq \infty$$

выполняется в том и только том случае, если

$$L(z) \neq \emptyset, \tag{17}$$

где

$$L(z) = \{i : \langle \tilde{a}^i, z \rangle < 0\}.$$

В случае (17)

$$\lambda(x,z) = \min\left\{ \frac{-r_i(x)}{(\tilde{a}^i, z)} :\ i \in L(z) \right\}. \qquad (18)$$

Номер i, на котором в (18) достигается значение $\lambda(x,z)$, обозначим $i(x,z)$. Ограничение с номером $i(x,z)$ является активным в точке $x + \lambda(x,z)z$.

Если и только если

$$L(z) \bigcap M(x) \neq \emptyset,$$

то

$$\lambda(x,z) = 0.$$

В этом случае

$$i(x,z) \in L(z) \bigcap M(x).$$

Ограничение с номером $i(x,z)$ является активным в исходной точке x.

Если же

$$L(z) \bigcap M(x) = \emptyset,$$

и справедливо условие (17), то

$$\lambda(x, z) > 0.$$

В этом случае

$$M(x) \subset M(x + \lambda(x, z)z).$$

Активными для вектора $x + \lambda(x, z)z$ будут не только ограничения с номерами из $M(x)$, но и с другими (одним или больше) номерами. В частности, активным становится ограничение с номером $i(x,z)$, не входящее в $M(x)$.

Если условие (17) не выполняется

$$L(z) = \emptyset,$$

то направление z называется **рецессивным**. При перемещении с любым сколь угодно большим шагом из точки $x \in X$ по данному направлению z будем оставаться в полиэдре X. Причем это свойство не зависит от исходной точки $x \in X$. Тривиальным случаем рецессивных направлений является также нулевой вектор.

***Задание** 7. Доказать, что множество определяемых здесь рецессивных ненулевых направлений для полиэдра X совпадает с затупленным (образованным исключением нулевого вектора) конусом решений (5) однородной системы линейных неравенств, т.е. с множеством*

$$\bar{W} = W / \{0\}.$$

Пример 2. На рис. 4 представлено множество решений системы линейных неравенств (16). Вектор $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ является одним из решений данной системы. Для направления $z = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ множество $L(z)$ не пусто, оно состоит из номеров двух первых в (16) ограничений. В данном случае $\lambda(x, z) = 1.5$. Активным для вектора $x + \lambda(x, z^1)z^1$ становится первое ограничение в (16), которое не было активным для рассматриваемого решения x.

Направление $z^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ является рецессивным. Для данного примера множество рецессивных направлений включает все векторы неотрицательного ортанта R_+^2.

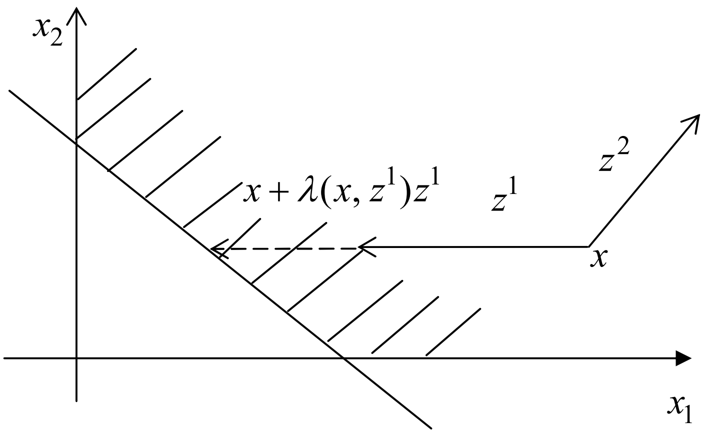

Рис. 4. Направление z^1 приводит к решению на границе области допустимых решений системы линейных неравенств (16). Направление z^2 является рецессивным.

2.3. Некоторые свойства системы линейных неравенств максимального ранга

В данном и следующих двух разделах рассмотрим свойства множества решений системы линейных неравенств (1), когда ранг системы совпадает с числом переменных, т.е. когда

$$r = n.$$

В этом случае

$$S^{\perp} = R^n, \quad S = \{0\}, \tag{19}$$

где S и $S^{\perp}$ – линейные подпространства, введенные в (2), (3).

Лемма 2. *Если (1) – система линейных неравенств максимального ранга, то не существует двух разных решений системы с максимальными наборами активных ограничений, у которых наборы активных ограничений совпадают.*

Доказательство. Пусть имеется два разных решения $x \in X$, $y = X$

$$x \neq y \tag{20}$$

с одинаковыми наборами активных ограничений

$$M(x) = M(y). \tag{21}$$

Требуется доказать, что векторы x и y не могут быть решениями с максимальными наборами активных ограничений. Докажем, что существует вектор $\tilde{x} \in X$, для которого

$$M(x) \subset M(\tilde{x}). \tag{22}$$

Введем вектор

$$z = y - x.$$

Из (20), (21) следует

$$z \neq 0, \tag{23}$$

$$\left\langle \tilde{a}^i, z \right\rangle = 0, \quad i \in M(x). \tag{24}$$

Если

$$\left\langle \tilde{a}^i, z \right\rangle = 0, \quad i \in N(x), \tag{25}$$

то $z \in S$. А это противоречит (19). Следовательно, существует $i \in N(x)$

$$\left\langle \tilde{a}^i, z \right\rangle \neq 0.$$

Если для всех $i \in N(x)$

$$\left\langle \tilde{a}^i, z \right\rangle \geq 0,$$

то заменим вектор z на вектор $-z$.

Итак, можем считать, что для данного z выполняются условия (23), (24) и при этом

$$L(z) \neq \emptyset.$$

Следовательно,

$$\lambda(x, z) > 0.$$

Для вектора

$$\tilde{x} = x + \lambda(x, z) z$$

будет выполняться соотношение (22). Действительно, в силу (24)

$$M(x) \subseteq M(\tilde{x}).$$

При этом номер $i(x, z)$ будет входить в множество $M(\tilde{x})$ и не будет входить в множество $M(x)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если (1) – система линейных неравенств максимального ранга, то число ее решений с максимальными наборами активных ограничений конечно.*

Доказательство. Для каждого решения $x \in X$ множество номеров ограничений $\{1, \ldots, m\}$ разбивается на два непересекающихся подмножества $M(x), N(x)$. Согласно лемме 2 у решений с максимальными наборами активных ограничений эти разбиения должны быть различными. Число различных разбиений множества из m элементов на два подмножества конечно и равно 2^m.

Лемма 3 доказана.

Задание 8. *Доказать, что у каждого решения с максимальным набором активных ограничений системы линейных неравенств (1) максимального ранга число активных ограничений не меньше n.*

Задание 9. *Доказать, что число решений с максимальным набором активных ограничений системы линейных неравенств (1) максимального ранга не превышает числа сочетаний из m элементов по n,*

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Обозначим p^τ, $\tau = 1,\dots,t$ – множество решений системы (1) с максимальными наборами активных ограничений, где t – общее число таких решений для рассматриваемого здесь случая $r = n$.

Лемма 4. *Решение с максимальным набором активных ограничений системы линейных неравенств максимального ранга не может быть представлено в виде выпуклой комбинации двух других решений данной системы.*

Доказательство. Предположим, что при некоторых $x \in X, y \in X$

$$p^\tau = \lambda x + (1-\lambda)y, \tag{26}$$

где

$$\lambda \in (0,1),$$

p^τ – одно из решений системы (1) с максимальным набором активных ограничений.

В силу леммы 1,

$$M(p^\tau) \subseteq M(x).$$

Выполнение в строгой форме этого соотношения противоречит тому, что p^τ является решением с максимальным набором активных ограничений. Выполнение этого соотношения в виде равенства невозможно в силу леммы 2. Итак, получили что представление (26) невозможно.

Лемма 4 доказана.

2.4. Структура множества решений системы линейных неравенств при отсутствии ненулевых рецессивных направлений

Будем говорить, что система линейных неравенств не имеет рецессивных ненулевых направлений, если их не имеет множество решений данной системы, т.е. если порождаемая данной системой однородная система линейных неравенств имеет только тривиальное решение –

$$W = \{0\}. \tag{27}$$

Лемма 5. *Если система (1) не имеет ненулевых рецессивных направлений, то она является системой максимального ранга.*

Доказательство. Из данного в разделе 2.1 определения множеств W и S следует, что

$$S \subseteq W.$$

Условие (27) означает, что

$$S = \{0\},$$

следовательно, $r = n$, $\dim S = 0$.

Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Пусть система линейных неравенств (1) не имеет ненулевых рецессивных направлений. Тогда множество решений этой системы является политопом, образуемым выпуклой оболочкой решений системы с максимальными наборами активных ограничений.*

Доказательство. Докажем, что любое решение $x \in X$ можно представить в виде выпуклой комбинации векторов p^{τ}, $\tau = 1,\ldots,t$.

Пусть вектор x представляется в виде выпуклой комбинации набора векторов x^s, $s = 1,\ldots,N$ таких, что

$$M(x) \subseteq M(x^s),\ s = 1,\ldots,N. \tag{28}$$

Можем считать, что первоначальный рассматриваемый набор состоит из одного вектора, только из исходного вектора x.

Покажем, что если вектор x^s не является решением системы (1) с максимальным набором активных ограничений, то его можно представить в виде выпуклой комбинации двух векторов $y^1 \in X$, $y^2 \in X$ таких, что

$$M(x^s) \subset M(y^1), \quad M(x^s) \subset M(y^2). \tag{29}$$

Возьмем в качестве y^1 решение системы (1) с максимальным набором активных ограничений, для которого

$$M(x^s) \subset M(y^1). \tag{30}$$

Пусть

$$z = x^s - y^1.$$

Из (30) следует, что

$$\left\langle \tilde{a}^i, z \right\rangle = 0, \quad i \in M(x^s),$$

$$z \neq 0.$$

По условиям теоремы направление z не может быть рецессивным, следовательно, существует положительная величина

$$\lambda = \lambda(x^s, z)$$

такая, что для вектора

$$y^2 = x^s + \lambda z$$

будет выполняться соотношение

$$M(x^s) \subset M(y^2).$$

В набор $M(x^s)$ не входит номер $i(x, z)$. В набор $M(y^2)$ этот номер входит. Итак, соотношения (29) доказаны.

Поскольку

$$y^1 = x^s - z,$$
$$y^2 = x^s + \lambda z,$$

то

$$x^s = \alpha y^1 + (1-\alpha) y^2$$

при

$$\alpha = \lambda/(1+\lambda),$$

т. е. вектор x^s является выпуклой комбинацией векторов y^1, y^2.

Исключим из рассматриваемого набора данный вектор x^s и включим в него векторы y^1, y^2. Вектор x будет выпуклой комбинацией этого нового набора. Из (29) следует, что для нового набора также будут выполняться условия (28).

Поскольку у обоих векторов y^1 и y^2 наборы активных ограничений шире, чем у замененного ими вектора x^s, то после конечного числа таких замен придем к тому, что все векторы x^s будут решениями с максимальными наборами активных ограничений.

Теорема 1 доказана.

Задание 10. *Доказать, что множество решений системы линейных неравенств полного ранга будет ограниченным в том и только том случае, если оно не имеет ненулевых рецессивных направлений.*

Пример 3. На рис. 5 в виде заштрихованной области представлено множество решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 1, \\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned} \qquad (31)$$

В данном случае множество решений ограничено. Согласно теореме 1 оно должно быть политопом. Действительно, это множество является выпуклой оболочкой ортов e^1, e^2 и начала координат 0. Векторы $e^1, e^2, 0$ для данной системы являются решениями с максимальными наборами активных ограничений.

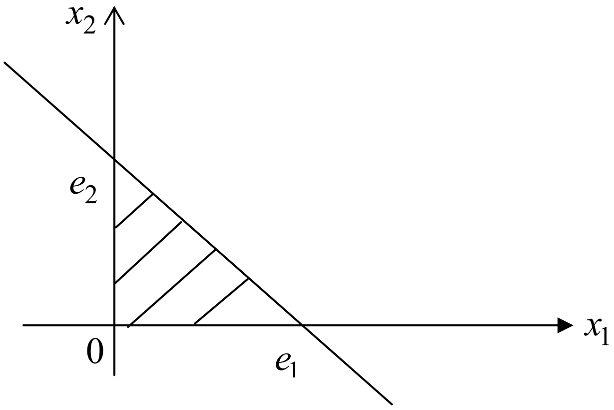

Рис. 5. Множество решений системы неравенств (31) является выпуклой оболочкой векторов $e^1, e^2, 0$.

2.5. Структура множества решений системы линейных неравенств максимального ранга

По-прежнему считаем, что ранг системы (1) равен числу переменных. При этом не исключаем возможность наличия рецессивных ненулевых направлений.

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$Ax \geq 0, \tag{32}$$

$$\left\langle \tilde{a}^{m+1}, x \right\rangle \geq -1, \tag{33}$$

где

$$\tilde{a}^{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}^i.$$

Множество решений системы (32), (33) обозначим V, т.е.

$$V = \left\{ x \in W : \left\langle \tilde{a}^{m+1}, x \right\rangle \geq -1 \right\}.$$

Размерность системы (32), (33) совпадает с размерностью линейного подпространства

$$\tilde{S} = \{ x = A^T u + u^{m+1} \tilde{a}^{m+1} : u \in R^m, u^{m+1} \in R \}.$$

Из определения (2) пространства $S^{\perp}$ следует, что $S^{\perp} \subseteq \tilde{S}$. Следовательно, размерность $\tilde{S}$ не может быть меньше размерности пространства $S^{\perp}$. Поскольку размерность $S^{\perp}$ в данном параграфе считается максимально возможной, то и $\tilde{S}$ будет иметь максимально возможную размерность, равную *n*. Поэтому (32), (33) – система линейных неравенств максимального ранга.

Убедимся, что порождаемая системой (32), (33) однородная система линейных неравенств

$$Ax \geq 0,$$

$$\left\langle \tilde{a}^{m+1}, x \right\rangle \geq 0 \tag{34}$$

имеет только тривиальное решение $x = 0$.

Действительно, если при каком-либо $x \in R^n$

$$\left\langle \tilde{a}^i, x \right\rangle \geq 0, \; i = 1, \ldots, m$$

и при этом для некоторого i

$$\left\langle \tilde{a}^i, x \right\rangle > 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^{m} \left\langle \tilde{a}^i, x \right\rangle = -\left\langle \tilde{a}^{m+1}, x \right\rangle > 0,$$

т.е. данный вектор x не будет удовлетворять условию (34). Выполнение при $x \neq 0$ всех равенств

$$\left\langle \tilde{a}^i, x \right\rangle = 0, \; i = 1, \ldots, m$$

невозможно, поскольку

$$rang\, A = n.$$

Итак, установлено, что у системы (32), (33) нет ненулевых рецессивных направлений. Поэтому для нее можно использовать факты, установленные в теореме 1.

Пусть $v^l, \; l = 0, 1, \ldots, k$ – все решения системы (32), (33) с максимальными наборами активных ограничений. В этот же набор обязательно входит тривиальное решение со всеми нулевыми компонентами. Считаем, что таковым является вектор v^0, т.е $v^0 = 0$. Для этого решения

$$Av^0 = 0,$$

$$\left\langle \tilde{a}^{m+1}, v^0 \right\rangle > -1.$$

Для остальных векторов набора

$$\left\langle \tilde{a}^{m+1}, v^l \right\rangle = -1, \; l = 1, \ldots, k.$$

По теореме (1) любое решение системы (32), (33) является выпуклой комбинацией векторов v^l

$$V = Co\{v^l, \; l = 0, 1, \ldots, k\}.$$

Если исключим вектор v^0, то получим множество решений с максимальными наборами активных ограничений следующей системы линейных неравенств

$$Ax \geq 0, \tag{35}$$

$$\left\langle \tilde{a}^{m+1}, x \right\rangle = -1. \tag{36}$$

В отличие от систем (32), (33) здесь последнее условие записано в виде равенства. Множество решений системы (35), (36) обозначим $\tilde{V}$. Справедливы соотношения

$$\tilde{V} \subseteq V \subseteq W.$$

Лемма 6. *Пусть система линейных неравенств (1) имеет максимальный ранг. Тогда множество решений порождаемой ею однородной систе-*

мы линейных неравенств будет конечным многогранным конусом, образующие которого – решения системы (35), (36) с максимальными наборами активных ограничений.

Доказательство. Из определения v^l и теоремы 1 следует, что

$$Co\{v^l, l=1,\ldots,k\}=\tilde{V}.$$

Вектор v^0 не принадлежит $\tilde{V}$. Из определения V и W следует, что при любом $\lambda \ge 0$

$$\lambda\tilde{V}\subseteq W.$$

Требуется доказать справедливость обратного соотношения, т.е. того, что для любого $x\in W$ существуют $v\in\tilde{V}$, $\beta\ge 0$ такие, что

$$x=\beta v.$$

Если $x=0$, то данное утверждение справедливо при $\beta=0$ и любом $v\in\tilde{V}$.

Пусть $x\ne 0$. Поскольку $x\in W$, то

$$Ax\ge 0$$

и из условия $r=n$ следует, что

$$\left\langle \tilde{a}^i,\ x\right\rangle >0$$

для некоторого номера $i\in\{1,\ldots,m\}$. Следовательно, величина

$$\beta=\left\langle -\tilde{a}^{m+1},\ x\right\rangle$$

– положительная.

При

$$v=\frac{1}{\beta}x$$

будут выполняться соотношения

$$Av\ge 0,$$

$$(\tilde{a}^{m+1}, v)=-1,$$

т.е. данный вектор v находится в $\tilde{V}$ и для него справедливо равенство (33) при $\beta>0$.

Лемма 6 доказана.

Теорема 2. *Пусть (1) – система линейных неравенств максимального ранга, p^τ, $\tau=1,\ \ldots,t$ – решения этой системы с максимальным набором активных ограничений, v^l, $l=1,\ldots,k$ – множество направлений, образующих конечный многогранный конус рецессивных направлений для рассматриваемой системы линейных неравенств. Тогда любое решение системы (1) представимо в виде суммы выпуклой комбинации векторов p^τ, $\tau=1,\ \ldots,t$ и конусной комбинации векторов v^l, $l=1,\ldots,k$*

$$X=Co\{p^\tau,\ \tau=1,\ \ldots,t\}+Cone\{v^l,\ l=1,\ldots,k\}.$$

Доказательство. По лемме 6

$$W = Cone\{v^l,\ l=1,\dots,k\}.$$

Из выпуклости X следует, что

$$Co\{p^\tau,\ \tau=1,\ \dots,t\} + W \subseteq X.$$

Требуется доказать справедливость обратного включения.

Пусть $x \in X$. Необходимо доказать, что существует вектор $z \in W$, величины $\lambda_i \geq 0,\ i=1,\dots,t$ такие что

$$\sum \lambda_i = 1,$$

при которых

$$x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i p^i + z. \tag{37}$$

Воспользуемся методом, примененным при доказательстве теоремы 1.

Пусть

$$x = y + z, \tag{38}$$

где

$$z \in W.$$

Вектор y является выпуклой комбинацией векторов $x^s \in X,\ s=1,\dots,N$ таких, что

$$M(x) \subseteq M(x^s),\ s=1,\dots,N.$$

Итак,

$$y = \sum_{s=1}^{N} \lambda_s x^s,$$

где

$$\lambda_s \geq 0,\ \ s=1,\dots,N$$

$$\sum \lambda_s = 1.$$

Первоначально можем считать, что

$$z=0,\ y=x,\ N=1,\ x^1=x.$$

Предположим, что вектор x^s при некотором $s \in \{1,\dots,N\}$ не является решением системы (1) с максимальным набором активных ограничений. Тогда существует вектор p^τ, являющийся решением системы (1) с максимальным набором активных ограничений такой, что

$$M(x^s) \subset M(p^\tau).$$

Пусть

$$\bar{z} = x^s - p^\tau.$$

Возможны два случая:

1. Если направление $\bar{z}$ – рецессивное,

$$L(\bar{z}) = \emptyset,$$

то заменим в представлении (38) вектор z на вектор

$$\tilde{z} = z + \bar{z}$$

и вектор y на вектор

$$\tilde{y} = y - \bar{z}.$$

Исключим из набора вектор x^s и введем вместо него вектор p^τ. Далее в качестве вектора z будем использовать вектор $\tilde{z}$.

2. Если

$$L(\bar{z}) \neq \emptyset,$$

то

$$\lambda(x^s, \bar{z}) > 0.$$

Вектор x^s будет выпуклой комбинацией векторов p^τ и

$$\tilde{y} = x^s + \lambda(x^s, \bar{z})\bar{z}.$$

Причем

$$M(x^s) \subset M(p^\tau),\ M(x^s) \subset M(\tilde{y}).$$

Исключим из набора вектор x^s и включим в набор векторы p^τ и y. Полученный набор векторов вместе с вектором z даст представление (38).

После конечного числа таких замен в любом из двух вариантов получим множество векторов x^s, у которых максимальны наборы активных ограничений, т.е. получим требуемое представление (37).

Теорема 2 доказана.

Пример 4. Рассмотренная выше система линейных неравенств (16) имеет максимальный ранг и неограниченное множество решений. Множество решений системы (16) представлено на рис. 3. В данном случае имеется два решения с максимальными наборами активных ограничений: орты e^1 и e^2. По теореме 2 любое решение системы (16) есть сумма двух векторов:

1) выпуклой оболочки ортов e^1 и e^2, что составляет отрезок между этими векторами;

2) конечного конуса рецессивных направлений, состоящего в данном случае из векторов R_+^2.

2.6. Структура множества решений системы линейных неравенств в общем случае

Рассмотрим теперь общий случай, когда ранг системы (1) может иметь любое значение как равное, так и меньшее n.

Любой вектор $x \in R^n$ однозначно представляется в виде суммы векторов $y \in S^\perp$ и $f \in S$

$$x = y + f. \qquad (39)$$

По определению S

$$Af = 0.$$

Поэтому, чтобы вектор x был решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы вектор y был решением системы

$$Ay \geq b. \tag{40}$$

Пусть $y^s, s = 1,\dots,r$ – базис пространства $S^{\perp}$. В частности, это может быть максимальный набор линейно независимых векторов $\tilde{a}^i$, составленный из строк матрицы A. Рассматриваемый вектор y можно представить в виде линейной комбинации векторов y^s

$$y = \sum_{s=1}^{r} \beta_s y^s,$$

где β_s – некоторые весовые коэффициенты.

Тогда условие (40) можно представить в виде системы линейных неравенств относительно переменных β_s, $s = 1,\dots,r$, составляющих вектор $\beta \in R^r$

$$\left\langle \hat{a}^i, \beta \right\rangle \geq b,\ i = 1,\dots,m, \tag{41}$$

здесь

$$\hat{a}_s^{\ i} = \left\langle \tilde{a}^i, y^s \right\rangle,\ s = 1,\dots,r, \quad i = 1,\dots,m.$$

Действительно

$$\left\langle \tilde{a}^i, (\sum_{s=1}^{r} \beta_s y^s) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \left(\sum_{s=1}^{r} y_j^s \beta_s \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} \tilde{a}_j^i y_j^s \beta_s = \sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j^i, y_j^s \right) \beta_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} \beta_s \hat{a}_s^i = \left\langle \hat{a}^i, \beta \right\rangle.$$

Система неравенств (41) имеет r переменных и ранг, равный r. Это система максимального ранга, для описания множества решений которой можно воспользоваться результатами предыдущего раздела. Пусть β^{τ}, $\tau = 1,\dots,t$ – множество решений системы (41) с максимальным набором активных ограничений. Обозначим $\tilde{\beta}^l$, $l = 1,\dots,k$ множество решений с максимальным набором активных ограничений следующей системы линейных неравенств

$$\left\langle \hat{a}^i, \beta \right\rangle \geq 0, \quad i = 1,\dots,n$$

$$\left\langle \hat{a}^{m+1}, \beta \right\rangle = -1,$$

где

$$\hat{a}^{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} \hat{a}^i.$$

Тогда любое решение системы (41) имеет вид

$$\beta = \sum_{\tau=1}^{t} \lambda_\tau \beta^\tau + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \tilde{\beta}^l, \tag{42}$$

где

$$\sum \lambda_\tau = 1,\ \lambda_t \ge 0,\ \ \tau = 1,\ldots t \tag{43}$$

$$\alpha_l \ge 0,\ \ l = 1,\ldots,k. \tag{44}$$

Введем векторы

$$p^\tau = \sum_{s=1}^{r} \beta_s^\tau y^s, \quad \tau = 1,\ldots,t,$$

$$v^l = \sum_{s=1}^{r} \beta_s^l y^s, \quad l = 1,\ldots,k.$$

Задание 11. *Доказать, что векторы* p^τ, $\tau = 1,\ldots,t$ *составляют множество решений системы (1) из подпространства* $S^\perp$ *с максимальными наборами активных ограничений по сравнению с другими решениями этой системы из подпространства* $S^\perp$.

Задание 12. *Доказать, что векторы* v^l, $l = 1,\ldots,k$ *составляют множество решений системы (35), (36) из подпространства* $S^\perp$ *с максимальными наборами активных ограничений по сравнению с другими решениями этой системы из подпространства* $S^\perp$.

На основе (42) имеем следующее описание любого решения системы (1) из линейного многообразия $S^\perp$

$$y = \sum_{\tau=1}^{t} \lambda_\tau p^\tau + \sum_{l=1}^{k} \alpha_l v^l, \tag{45}$$

где весовые коэффициенты λ_τ, α_l удовлетворяют условиям (43), (44).

Учитывая (39) получаем следующее утверждение

Теорема 3. *Множество решений системы линейных неравенств (1) является суммой трех множеств*

$$X = Co\{p^\tau,\ \tau = 1,\ldots,t\} + Cone\{v^l,\ l = 1,\ldots,k\} + S,$$

где p^τ, $\tau = 1,\ldots,t$ *– решение системы (1) из подпространства* $S^\perp$ *с максимальным набором активных ограничений,* v^l, $l = 1,\ldots,k$ *– образующие конечного многогранного конуса решений однородной системы линейных неравенств, порождаемой системой (1) из линейного подпространства* $S^\perp$.

Заметим, что не обязательно использовать набор векторов p^τ, $\tau = 1,\ldots,t$ только из $S^\perp$. К любому из этих векторов можно добавлять любой вектор из S. Теорема будет справедлива и для такого набора векторов. Как отмечалось, при добавлении к вектору p^τ любого вектора из S получим также вектор, являющийся решением системы (1) с максимальным набором активных ограничений. Теорема 3 будет справедлива, если вместо указанного в ней вектора p^{τ} из $S^{\perp}$ взять любое нерасширяемое множество решений системы (1) с максимальными наборами активных ограничений, у которых разные эти наборы. Условие нерасширяемости означает, что не существует других решений системы (1) с максимальными наборами активных ограничений, у которых эти наборы отличаются от наборов активных ограничений всех выбранных нами векторов.

Отметим также, что сумма многогранного конуса решений однородной системы линейных неравенств, порожденной системой (1), и линейного подпространства S образует конус рецессивных направлений. С учетом этого, получаем из теоремы 3 следующие два утверждения.

Теорема 4. *Любое решение системы линейных неравенств представляется в виде суммы двух векторов. Один из них является выпуклой комбинацией любого максимального множества векторов с минимальными наборами номеров неактивных ограничений. Другой вектор является точкой многогранного конуса решений однородной системы линейных неравенств, порожденной данной системой.*

Теорема 5. *Многогранный конус решений однородной системы линейных неравенств является суммой некоторого конечного многогранного конуса и некоторого линейного подпространства.*

Отметим, что выражение (45) при условиях (43), (44) дает множество векторов y, составляющих проекцию множества решений X системы (1) на линейное подпространство $S^{\perp}$.

В случае $r < n$ утверждение леммы 2 не верно – существует бесконечно много различающихся решений системы (1) с одним и тем же максимальным набором активных ограничений. Действительно, для любого вектора $x \in X$ добавление к нему любого вектора $z \in S$ будет давать решение $x + z \in X$. При этом

$$M(x) = M(x + z).$$

Пример 5. На рис. 6 представлено множество решений системы, состоящей из одного неравенства

$$x_1 + x_2 \geq 1.$$

Эта система не максимального ранга. Ее ранг равен 1, что меньше числа переменных. Согласно теореме 3, любое решение данной системы можно представить в виде суммы трех векторов

$$x = p + v + s.$$

Здесь

1. Вектор s – из линейного подпространства S решений уравнения $s_1 + s_2 = 0$.

2. Вектор v принадлежит конусу рецессивных направлений в ортогональном линейном подпространстве $S^{\perp}$. В данном случае конус является лучом
$$W \cap S^{\perp} = \{\lambda z : \lambda \geq 0\},$$
где
$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
3. Вектор p принадлежит выпуклой оболочке решений системы в ортогональном линейном подпространстве $S^{\perp}$ с максимальными наборами активных ограничений. В данном примере имеется только одно такое решение
$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Итак, в данном примере любое решение можно представить в виде
$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
при некотором $\lambda \geq 0$ и любом вещественном α.

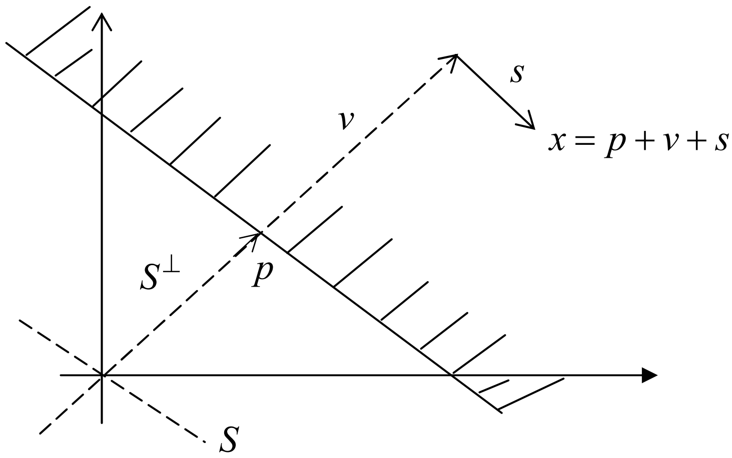

Рис. 6. Любое решение x линейного неравенства $x_1 + x_2 \geq 1$ можно представить в виде суммы вектора p, направления v из $W \cap S^{\perp}$ и направления s из S.

2.7. Некоторые особые виды систем линейных неравенств

В отдельных случаях некоторые из указанных в теоремах 4, 5 трех составляющих множества решений систем линейных неравенств могут иметь единственный вектор.

Система линейных уравнений. Частным случаем системы линейных неравенств является система линейных равенств. Рассмотрим систему линейных уравнений относительно вектора переменных $x \in R^n$

$$Ax = b. \tag{46}$$

Здесь A – матрица размера $m \times n$, b – вектор R^m. Эту систему можно представить в таком виде

$$Ax \ge b,$$

$$\left\langle a^{m+1}, x \right\rangle \ge b^{m+1},$$

где

$$a^{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} \tilde{a}^i, \quad b^{m+1} = -\sum_{i=1}^{m} b^i,$$

$\tilde{a}^i$ – вектор, составленный из коэффициентов i – й строки матрицы A.

У системы (46) имеется единственное решение из подпространства $S^{\perp}$ с максимальным набором активных ограничений. Это будет решение системы с наименьшей евклидовой нормой

$$p = \arg\min\{\|x\|: \ Ax = b\}.$$

У данной системы нет ненулевых рецессивных направлений в подпространстве $S^{\perp}$. Поэтому множество ее решений представляется в таком виде

$$X = p + S,$$

где

$$S = \{s \in R^n : \ As = 0\}.$$

Так, например, множество решений системы, состоящей из одного равенства

$$x_1 + x_2 = 1.$$

представляется в виде суммы

$$X = p + S,$$

где p – решение системы с наименьшей евклидовой нормой

$$p = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

а S – линейное подпространство решений уравнения $s_1 + s_2 = 0.$

Итак,

$$x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

при любом вещественном α. Вместо вектора p можно взять любое другое решение рассматриваемого уравнения, т.е. вектор $p+s$, где $s \in S$.

Система линейных уравнений с неотрицательными переменными. Рассмотрим систему линейных уравнений и неравенств относительно вектора переменных $x \in X$

$$Ax = b, \quad x \geq 0.$$

Для данной системы линейное подпространство S состоит из одного нулевого вектора, поэтому эта система максимального ранга. Согласно теореме 2 множество ее решений будет являться суммой двух множеств:

1) выпуклой оболочки решений данной системы с максимальными наборами нулевых компонент;
2) конусной оболочки решений следующей системы линейных неравенств с максимальными наборами нулевых компонент:

$$Ax = b, \quad x \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Система двусторонних линейных неравенств. Рассмотрим систему уравнений и неравенств относительно вектора переменных $x \in R^n$

$$Ax = b, \tag{47}$$

$$\overline{x} \geq x \geq \underline{x}. \tag{48}$$

Заданными являются матрица A размера $m \times n$, векторы $b \in R^n$, $\overline{x} \in R^n$, $\underline{x} \in R^n$. Причем

$$\overline{x} \geq \underline{x}.$$

Ограничения (48) иногда называют «параллелепипедными».

Система (47), (48) заведомо имеет ограниченное множество решений, поскольку таковым является множество векторов, удовлетворяющих условию (48). По теореме 1 множество решений данной системы является политопом, состоящим из выпуклых комбинаций решений системы с максимальным набором активных ограничений.

Вопросы и задачи к главе 2

1. Определить ранг приведенной ниже системы линейных неравенств. Является ли она системой максимального ранга?

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 9,$$

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 \geq -4,$$

$$4x_1 - 7x_2 + x_3 \geq 5.$$

2. Для системы линейных неравенств

$2x_1 + x_2 \geq 1,$

$x_1 - x_2 \geq -1,$

$x_1 + x_2 \leq 4,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

1) определить ранг;

2) указать решения с максимальными и с минимальным наборами активных ограничений;

3) определить множество рецессивных направлений.

3. Для системы неравенств

$x_1 - x_2 \geq -2,$

$x_1 + x_2 \geq 2,$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$

указать множества направлений, приводящих к решениям на границе области допустимых решений и множество рецессивных направлений.

4. Являются ли приведенные ниже системы линейных неравенств системами полного ранга? Имеют ли данные системы линейных неравенств рецессивные ненулевые направления? Будет ли множество их решений ограниченным?

1) $2x_1 - 3x_2 \geq -1,$
$3x_1 - x_2 \leq 2,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

2) $2x_1 - 3x_2 \leq -1,$
$3x_1 - x_2 \geq 2,$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

5. Представить множества решений систем линейных неравенств из задания 4 в виде суммы выпуклой комбинации решений этих систем с максимальным набором активных ограничений и конуса рецессивных направлений.

6. Имеет ли система линейных неравенств

$2x_1 + 4x_2 \geq 1,$

$3x_1 + x_2 \leq 5,$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

рецессивные ненулевые направления? Представить множество решений этой системы в виде суммы выпуклой комбинации решений системы с максимальным набором активных ограничений и конуса рецессивных направлений.

Глава 3. Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств

Одним из фундаментальных фактов теории математического моделирования и оптимизации являются теоремы об альтернативных системах линейных неравенств. Существуют разные варианты формулировок этих теорем. Многие из них имеют такой вид: каждой системе линейных неравенств можно поставить в соответствие (по некоторым обсуждаемым далее правилам) альтернативную систему линейных неравенств. Альтернативность состоит в том, что одна и только одна из этих двух систем будет иметь решение, а вторая обязательно будет иметь противоречивые условия. При этом имеет место симметрия систем: альтернативная к альтернативной совпадает с исходной.

Поскольку указанная конструкция может применяться к разным типам систем линейных неравенств, то существует много внешне сильно различающихся математических формулировок теорем, ряд которых будет приведен в данной главе. Иногда все эти теоремы обобщенно называют теоремой или леммой Фаркаша, по фамилии венгерского математика, опубликовавшего в 1902 г. работу по альтернативным системам линейных неравенств. Иногда теоремой Фаркаша называют только одну из формулировок утверждений об альтернативных системах линейных неравенств, непосредственно рассматривавшуюся им. Ниже приводится эта формулировка. Остальные варианты теорем об альтернативных системах линейных неравенств связывают с именами других математиков. Далее будут приведены формулировки с указанием авторов, опираясь на фундаментальную монографию по линейным неравенствам С. Н. Черникова [18] и обзорные работы по теоремам об альтернативных системах линейных неравенств К. Г. Бройдена [19, 20].

В связи с большим количеством вариантов теорем об альтернативных системах линейных неравенств возникает проблема выбора наиболее наглядной, хорошо запоминающейся формулировки, на основе которой можно было бы легко получать другие. В качестве отправного пункта для вывода разных вариантов теоремы об альтернативных системах линейных неравенств здесь используется следующий геометрический факт: среди всех векторов взаимно ортогональных линейных подпространств с неотрицательными компонентами имеются такие, сумма которых дает вектор со всеми положительными компонентами.

Другой педагогической проблемой является выбор метода доказательства. Ниже приводится компактное доказательство, непосредственно вытекающее из теоремы Лагранжа для задачи минимизации выпуклой функции при линейных ограничениях. С обзора свойств данной задачи начнем наше изложение.

3.1. Теорема Лагранжа для задачи оптимизации дифференцируемой выпуклой функции при линейных ограничениях

Исходным пунктом в наших рассуждениях будет служить задача безусловной минимизации дифференцируемой выпуклой функции от вектора n-мерного пространства:

$$f(x) \to \min, \quad x \in R^n. \tag{1}$$

Напомним, что функция f от вектора R^n называется выпуклой, если для любых $x \in R^n$, $y \in R^n$ при любом вещественном $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{2}$$

Для дифференцируемой выпуклой функции при любых $x \in R^n$, $s \in R^n$

$$f(x+s) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), s \rangle, \tag{3}$$

где $\nabla f(x)$ – градиент функции f в точке x.

Задание 1. *Доказать, что для дифференцируемой функции f от вектора R^n свойства (2) и (3) равносильные – выполнение одного из них влечет выполнение второго.*

Вектор $\bar{x} \in R^n$ является решением задачи (1) в том и только том случае, если при любом $s \in R^n$

$$f(\bar{x}+s) \ge f(\bar{x}). \tag{4}$$

Это определение точки минимума любой функции f, не обязательно выпуклой и дифференцируемой.

Для выпуклой дифференцируемой функции из (3), (4) получаем следующее утверждение. Для того чтобы вектор $\bar{x}$ доставлял минимум для функции f необходимо и достаточно, чтобы функция f в точке $\bar{x}$ не убывала по любому направлению, т.е. для любого $s \in R^n$ должно выполняться неравенство

$$\langle \nabla f(\bar{x}), s \rangle \ge 0. \tag{5}$$

Задание 2. *Доказать, что условие (5) является необходимым и достаточным для того, чтобы вектор $\bar{x} \in R^n$ был решением задачи (1).*

Поскольку

$$\langle \nabla f(\bar{x}), -s \rangle = -\langle \nabla f(\bar{x}), s \rangle,$$

то условие (5) означает равенство нулю производной в данной точке $\bar{x}$ функции f по всем направлениям: для любого $s \in R^n$ должно выполняться равенство

$$\langle \nabla f(\bar{x}), s \rangle = 0. \tag{6}$$

Производная функции f в данной точке является линейной функцией от направления. Поэтому для выполнения условия (6) по всем $s \in R^n$ достаточно выполнения этого условия для какого-либо набора базисных векторов в R^n. В частности, это может быть набор ортов в R^n. Тогда получаем широко известное необходимое и достаточное условие оптимальности вектора $\bar{x}$ для задачи минимизации выпуклой дифференцируемой функции:

$$\nabla f(\bar{x}) = 0. \tag{7}$$

Следует подчеркнуть важные различия условий оптимальности (5) и (7). Условие (5) характеризует точку оптимума в терминах возможных направлений: для того чтобы вектор $\bar{x}$ был оптимальным решением, целевая функция не должна убывать по любому допустимому направлению. Этот критерий является наглядным, но не конструктивным, поскольку при исследовании данной точки на оптимальность нельзя перебрать все допустимые направления.

Критерий (7) является конструктивным. По нему непосредственно можно установить оптимальность данного вектора.

При исследовании более сложных задач оптимизации с ограничениями также широко применяются оба типа критериев оптимальности – как в терминах возможных направлений, так и в терминах свойств функций в данной точке. При этом в качестве возможных выступают только те направления, которые не выводят из области допустимых решений. Построение конструктивных критериев, обобщающих (7) на случай задач с ограничениями, осуществляется с помощью использования множителей Лагранжа этих ограничений.

Существуют разные способы введения и интерпретации множителей Лагранжа. Ниже для задачи минимизации функции при линейных ограничениях это будет сделано на основе свойств ортогональных линейных подпространств.

Оптимизация на линейном подпространстве. Рассмотрим задачу минимизации дифференцируемой выпуклой функции f на линейном подпространстве S:

$$f(x) \to \min, \; x \in S. \tag{8}$$

Она является непосредственным обобщением задачи (1). Оптимизация на линейном подпространстве сводится к безусловной оптимизации в пространстве меньшей (если не имеет место случай $S = R^n$) размерности. Действительно, воспользуемся представлением подпространства S как области значений некоторой матрицы D размера $n \times k$

$$S = \left\{ x = Dv : v \in R^k \right\}.$$

Следовательно, задача (8) сводится к проблеме безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой функции

$$\tilde{f}(v) = f(Dv)$$

от вектора $v \in R^k$.

Задание 3. *Доказать, что если* $f(x)$ *– выпуклая дифференцируемая функция от вектора* $x \in R^n$, *то* $\tilde{f}(v) = f(Dv)$ *является выпуклой дифференцируемой функцией от вектора* $v \in R^k$, *где* D *– заданная матрица размера* $n \times k$.

Для любого вектора из S множество допустимых по условиям задачи (8) направлений (то есть не выводящих из S) совпадает с подпространством S. Условие оптимальности (6) применительно к задаче (8) преобразуется в следующее утверждение.

Теорема 1 (условие оптимальности в терминах возможных направлений). *Для того чтобы вектор* $\bar{x} \in S$ *был оптимальным решением задачи (8), необходимо и достаточно равенства нулю производных функции f в точке* $\bar{x}$ *по любому направлению из S, т. е. для всех* $s \in S$ *должно выполняться равенство*

$$\langle \nabla f(\bar{x}), s \rangle = 0 .$$

Это означает, что проекция градиента $\nabla f(\bar{x})$ на подпространство S должна быть нулевым вектором, т.е. градиент в точке оптимума должен находиться в $S^{\perp}$. Получаем утверждение, которое можно интерпретировать как обобщение критерия (7).

Теорема 2 (условие оптимальности Лагранжа в геометрическом представлении). *Для того чтобы вектор* $\bar{x} \in S$ *был оптимальным решением задачи (8), необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$\nabla f(\bar{x}) \in S^{\perp}. \qquad (9)$$

Для случая, когда линейное подпространство S определяется как множество решений системы однородных уравнений, теорему 2 можно перефразировать в более привычный вид теоремы Лагранжа. Итак, рассматривается задача

$$f(x) \to \min, \quad Ax = 0 . \qquad (10)$$

В этом случае

$$S^{\perp} = \left\{ y = A^T u : u \in R^m \right\} .$$

Теорема 2 переходит в следующее утверждение.

Теорема 3 (условие оптимальности Лагранжа). *Для того чтобы вектор* $\bar{x}$, *удовлетворяющий ограничениям задачи (10), был оптимальным решением данной задачи, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\nabla f(\bar{x}) = A^{\mathrm{T}}\bar{u}$$

при некотором $\bar{u} \in R^m$.

Данный вектор $\bar{u}$ называется вектором множителей Лагранжа ограничений задачи (10).

Оптимизация на линейном многообразии. Приведенные выше теоремы непосредственно обобщаются на задачу минимизации выпуклой функции f от векторов R^n на линейном многообразии $L \subset R^n$:

$$f(x) \to \min, \quad x \in L. \tag{11}$$

Линейное подпространство является линейным многообразием. Поэтому задача (11) может рассматриваться как обобщение задачи (8). Вместе с тем для задачи (11) действуют те же критерии оптимальности. Считаем, что S – линейное подпространство, параллельное L. Справедливы следующие утверждения, обобщающие теоремы 1 и 2.

Теорема 1а. *Для того чтобы вектор* $\bar{x} \in L$ *был оптимальным решением задачи (11), необходимо и достаточно равенства нулю производных функции* f *в точке* $\bar{x}$ *по любому направлению из* S, *т. е. для всех* $s \in S$ *должно выполняться равенство*

$$(\nabla f(\bar{x}), s) = 0.$$

Теорема 2а. *Для того чтобы вектор* $\bar{x} \in L$ *был оптимальным решением задачи (11), необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$\nabla f(\bar{x}) \in S^{\perp}.$$

Задание 4. *Опираясь на теоремы 1, 2 и определение линейного многообразия как сдвига линейного подпространства на заданный вектор, доказать теоремы 1а, 2а.*

Любое линейное многообразие можно определить как множество решений некоторой системы линейных уравнений, т. е. задачу (11) можно представить в такой форме

$$f(x) \to \min, \; Ax = b \tag{12}$$

при заданной матрице A размера $m \times n$ и заданном векторе b. В общем случае, в том числе при $b \neq 0$, обобщением теоремы 3 будет следующая формулировка условия оптимальности Лагранжа.

Теорема 3а. *Для того чтобы вектор* $\bar{x}$, *удовлетворяющий ограничениям задачи (12), был оптимальным решением данной задачи, необходимо и достаточно выполнения при некотором* $\bar{u} \in R^n$ *равенства*

$$\nabla f(\bar{x}) = A^{\mathrm{T}}\bar{u}. \tag{13}$$

При этом для векторов $\bar{x}$, $\bar{u}$ *выполнится соотношение*

$$(\nabla f(\overline{x}), \overline{x}) = b^{\mathrm{T}}\overline{u}\,. \tag{14}$$

Данный вектор $\overline{u}$ будет состоять из множителей Лагранжа ограничений задачи (12). Соотношение (14) вытекает из (13) и равенства $A\overline{x} = b$. Действительно,

$$(\nabla f(\overline{x}), \overline{x}) = (A^{\mathrm{T}}\overline{u}, \overline{x}) = \overline{u}^{\mathrm{T}} A\overline{x} = \overline{u}^{\mathrm{T}} b\,.$$

Для задачи минимизации при ограничениях в виде линейной однородной системы (10) условие (14) выполняется тривиальным образом. Выражения в правой и левой частях этого равенства равны нулю. Выражение в левой части равно нулю, потому что $\overline{x} \in S$ (т.е. по теореме 1а). Выражение в правой части равно нулю, потому что $b = 0$. При $b \neq 0$ равенство (14) может выполняться для ненулевых значений.

3.2. Теоремы об альтернативах в геометрической форме

Для произвольного множества $Q \subset R^n$ подмножество его векторов с неотрицательными всеми компонентами обозначим

$$Q_+ = Q \bigcap R_+^n.$$

Пусть S и $S^{\perp}$ – два взаимно ортогональных подпространства в R^n. Для любых векторов $x \in S_+$, $y \in S_+^{\perp}$

$$\min\{x_j, y_j\} = 0, \quad j = 1,...,n\,. \tag{15}$$

Действительно, из того, что $x \geq 0$, $y \geq 0$, следует

$$x_j y_j \geq 0, \quad j = 1,...,n\,.$$

Поскольку $x \in S_+$, $y \in S_+^{\perp}$, то

$$\sum x_j y_j = 0\,.$$

Поэтому из того, что $x \in S_+$ и $y \in S_+^{\perp}$, следует

$$x_j y_j = 0, \quad j = 1,...,n\,, \tag{16}$$

что дает (15).

Соотношение (15) и равносильное ему соотношение (16) называются ***условием дополняющей нежесткости***. Оно выполняется для любых векторов $x \in S_+$, $y \in S_+^{\perp}$. Согласно (15) для любого $j \in \{1,...,n\}$ или $x_j = 0$, или $y_j = 0$. При этом не исключается возможность того, что для некоторого j

$$x_j = y_j = 0\,. \tag{17}$$

Одним из основных результатов данного раздела будет доказательство того факта, что для некоторых пар векторов из S_+ и $S_+^\perp$ ситуация (17) не имеет места, т. е. существуют $x \in S_+$ и $y \in S_+^\perp$, для которых

$$\max\{x_j, y_j\} > 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Неравенство (18) означает, что для любого j либо $x_j > 0$, либо $y_j > 0$. Свойства (15), (18) вместе составляют **условие строгой дополняющей нежесткости или условие дополняющей нежесткости в строгой форме**.

Теорема 4. *Пусть* S, $S^\perp$ *– ортогональные линейные подпространства в* R^n. *Для любого* $k \in \{1,\dots,n\}$ *в одном и только одном линейном подпространстве* S *или* $S^\perp$ *имеется вектор* x *такой, что*

$$x_k = 1,\ x \ge 0. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \to \min,\ x \in S, \tag{20}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{j \ne k}(x_j)_-^2 + \frac{1}{2}(1 - x_k)^2$$

при

$$(x_j)_- = \min\{x_j, 0\}.$$

Отметим, что при любом $x \in R^n$ $\varphi(x) \ge 0$.

Не существует векторов x, z из R^n, при которых функция $f(\lambda) = \varphi(x + \lambda z)$ монотонно убывает при любом увеличении λ. Всегда найдется такое значение λ, при превышении которого указанная функция будет неизменна или будет возрастать. Следовательно, задача (20) имеет оптимальное решение

$$\bar{x} = \arg\min \varphi(x),\ x \in S.$$

Оптимальное значение целевой функции рассматриваемой задачи обозначим

$$\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}).$$

Равенство $\bar{\varphi} = 0$ выполняется в том и только том случае, если во множестве S имеется вектор, удовлетворяющий (19), который и будет решением $\bar{x}$.

Осталось доказать утверждение теоремы для случая $\bar{\varphi} > 0$. Обозначим K множество номеров j компонент вектора $\bar{x}$, не равных k, для которых $\bar{x}_j < 0$. Согласно теореме 1,

$$\langle \nabla \varphi(\bar{x}), \bar{x} \rangle = 0.$$

Это означает, что

$$\sum_{j \in K} (\bar{x}_j)^2 + \bar{x}_k(\bar{x}_k - 1) = 0.$$

Если $K = \varnothing$, то $\bar{x}_k = 0$ (случай $\bar{x}_k = 1$ противоречит условию $\bar{\varphi} > 0$). Если $K \neq \varnothing$, то величина $\bar{x}_k(\bar{x}_k - 1)$ должна быть отрицательной. Поэтому $1 > \bar{x}_k > 0$. Итак, в обоих случаях $1 - \bar{x}_k > 0$. Так как $\nabla_k \varphi(\bar{x}) = \bar{x}_k - 1$ и $\nabla_j \varphi(\bar{x}) \leq 0$ для всех $j \neq k$, то вектор

$$y = \frac{1}{x_k - 1} \nabla \varphi(\bar{x})$$

будет удовлетворять условиям (19) и при этом будет находиться в $S^{\perp}$, так как согласно теореме 2 в $S^{\perp}$ находится вектор $\nabla \varphi(\bar{x})$.

Теорема 4 доказана.

Теорема 4а. *Пусть* S, $S^{\perp}$ *– ортогональные линейные подпространства в* R^n. *Для любого* $k \in \{1,...,n\}$ *в одном и только одном линейном подпространстве* S *или* $S^{\perp}$ *имеется вектор x такой, что*

$$x_k > 0, x \geq 0.$$

Задание 5*. Доказать на основе теоремы 4 теорему 4а.*

Приведем еще одну формулировку теоремы об альтернативных линейных неравенствах в геометрическом виде.

Теорема 5. *Существуют векторы* $x \in S_+$, $y \in S_+^{\perp}$ *такие, что*

$$x_j + y_j > 0, j = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим x^k – вектор, удовлетворяющий условиям (19) для данного $k = 1,2,...,n$. Вектор x^k, согласно теореме 4, находится либо в S, либо в $S^{\perp}$.

Множество номеров $k = 1,2,...,n$ разобьем на два подмножества. Пусть $J(S_+)$ состоит из номеров *k*, при которых $x^k \in S$. Множество $J(S_+^{\perp})$ состоит из номеров *k*, при которых $x^k \in S^{\perp}$. Векторы

$$x = \sum_{k \in J(S_+)} x^k, \; y = \sum_{k \in J(S_+^{\perp})} x^k$$

будут обладать свойством (21).

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть* S, $S^{\perp}$ *– ортогональные линейные подпространства в* R^n. *Тогда либо существует вектор* $x \in S$ *такой, что*

$$x \geq 0, \quad x \neq 0,$$

либо существует вектор $y \in S^{\perp}$ *такой, что*

$$y > 0.$$

Задание 6. *Доказать теорему 6.*

3.3. Теоремы об альтернативных строго однородных системах линейных неравенств

Напомним, в главе 2 однородной названа система линейных неравенств, у которой вектор в правой части условий нулевой. Иными словами, система линейных неравенств называется однородной, если множество ее решений образует острый конус, т. е. из того, что вектор x является решением этой системы, следует, что вектор λx также будет решением этой системы при любом $\lambda \geq 0$. Строго однородной системой линейных неравенств будем называть систему линейных неравенств, множество решений которой образует конус, не содержащий нулевой вектор. Это может достигаться за счет использования строгого неравенства в условиях системы, либо просто исключением нулевых решений при записи условий системы.

Используя алгебраический способ задания ортогональных подпространств, рассмотренный в главе 1, из приведенных в разделе 3.2 теорем об альтернативах в геометрической форме получаем целое семейство теорем об альтернативах в алгебраическом виде.

Теорема 5 при описании подпространств в виде

$$S^{\perp} = \{s = A^{T}u : \ u \in R^{m}\},$$

$$S = \{x \in R^{n} : \ Ax = 0\},$$

приобретает следующий вид.

Теорема 7. *Для любой матрицы A размера* $m \times n$ *существуют векторы* $\overline{x} \in R^{n}$, $\overline{u} \in R^{m}$ *такие, что*

$$A\overline{x} = 0, \quad \overline{x} \geq 0, \tag{22}$$

$$A^{\mathrm{T}}\overline{u} \geq 0, \tag{23}$$

$$(\overline{x} + A^{\mathrm{T}}\overline{u}) > 0. \tag{24}$$

Здесь последнее неравенство означает, что все компоненты вектора в круглых скобках положительные, т.е.

$$\overline{x}_{j} + (A^{\mathrm{T}}\overline{u})_{j} > 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

На основе теоремы 7 можно доказать приводимые ниже три теоремы.

Теорема 8 (теорема Гордана). *Либо существует вектор* $x \in R^{n}$ *такой, что*

$$Ax = 0,\ x \geq 0, x \neq 0, \tag{25}$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^{\mathrm{T}} u > 0. \tag{26}$$

Эта теорема является наиболее ранней из известных формулировок утверждений об альтернативных неравенствах. Она была опубликована в 1873 г.

Тот факт, что обе системы (25) и (26) не могут вместе иметь решения, следует из ортогональности ядра матрицы A и образа матрицы A^{T} и условия дополняющей нежесткости (16). То, что одна из этих систем имеет решение, следует из теоремы 7. Действительно, если система (25) не имеет решения, то для решения системы (22)–(24) с той же матрицей A вектор $\overline{x}$ будет нулевым. Отсюда, в силу (24), вектор $\overline{u}$ будет решением системы (26).

Нетрудно заметить, что теорема Гордана является алгебраическим аналогом теоремы 6 в геометрическом виде.

Теорема 9 (теорема Штимке). *Либо существует вектор* $x \in R^n$ *такой, что*

$$Ax \geq 0,\ Ax \neq 0,$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^{\mathrm{T}} u = 0,\ u > 0.$$

Нетрудно заметить, что теорема Штимке является симметричным аналогом теоремы Гордана и еще одной алгебраической записью теоремы 6.

Теорема 10 (теорема Вилля). *Либо существует вектор* $x \in R^n$ *такой, что*

$$Ax \leq 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0,$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^T u > 0,\ u \geq 0.$$

Задание 7. *Доказать теорему Вилля.*

Теорема 11 (теорема Моцкина). *Для любых матриц* A_1, A_2, A_3 *размеров* $m_1 \times n$, $m_2 \times n$ *и* $m_3 \times n$ *соответственно либо при некотором* $x \in R^n$

$$A_1 x > 0,\ A_2 x \geq 0,\ A_3 x = 0 \tag{27}$$

либо

$$A_1^{\mathrm{T}} u_1 + A_2^{\mathrm{T}} u_2 + A_3^{\mathrm{T}} u_3 = 0, \tag{28}$$

$$u_1 \geq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \geq 0, \tag{29}$$

при некоторых $u_1 \in R^{m_1}$*,* $u_2 \in R^{m_2}$*,* $u_3 \in R^{m_3}$.

Здесь $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 0$, $m_3 \geq 0$, т.е. не исключается, что у систем (27) и (28), (29) нет матрицы A_2 (если $m_2 = 0$) и, соответственно, вектора переменных u_2 или (и) нет матрицы A_3 (если $m_3 = 0$) и вектора переменных u_3.

В качестве пояснения к теореме 11 заметим, что в случае $m_2 = m_3 = 0$ эта теорема переходит в теорему 8, если в теореме 8 вместо матрицы A использовать матрицу A_1^{T}. При этом следует поменять местами векторы переменных x и u.

Задание 8*. Доказать теорему Моцкина.*

Теорема 12. *Либо существует вектор* $x \in R^n$ *такой, что*

$$Ax \leq 0,\ x > 0,$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^T u \geq 0,\ A^T u \neq 0,\ u \geq 0.$$

Задание 9*. Доказать теорему 12.*

Способы конструирования формулировок теорем об альтернативных строго однородных системах линейных неравенств. В дополнение к приведенным парам альтернативных систем можно сконструировать ряд других. Для этого достаточно в любой теореме об альтернативных строго однородных неравенствах все неравенства у одной из двух (или у обеих) систем поменять на противоположные. Теоремы останутся справедливыми.

Справедливость теорем также сохранится, если заменить в их формулировках исходные матрицы на транспонированные, а транспонированные на исходные.

3.4. Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств общего вида

В данном разделе рассматриваются системы линейных неравенств общего вида, которые в свою очередь включают как однородные, так и неоднородные случаи. Следовательно, эти теоремы справедливы и для однородных систем линейных неравенств.

Формулировки и доказательства теорем об альтернативных неоднородных системах линейных неравенств можно получить на основе теоремы 4. Из алгебраического способа описаний взаимно ортогональных подпространств теорему 4 можно представить в следующей форме.

Теорема 13. *Пусть A – матрица размера* $m \times n$. *Для любого* $k \in \{1,...,n\}$ *либо имеется вектор* $x \in R^n$ *такой, что*

$$Ax = 0,\ x \geq 0,\ x_k = 1, \tag{30}$$

либо имеется вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0,\ (A^{\mathrm{T}}u)_k = 1. \tag{31}$$

Приводимое ниже утверждение иногда используют в качестве одного из этапов доказательства теорем об альтернативных системах линейных неравенств. В формулируемых далее теоремах 14–16 считаются заданными матрица A размера $m \times n$ и вектор $b \in R^m$.

Теорема 14 (теорема Фредгольма). *Либо существует вектор* $x \in R^n$, *такой что*

$$Ax = b, \tag{32}$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^{\mathrm{T}}u = 0, \quad b^{\mathrm{T}}u \neq 0. \tag{33}$$

Доказательство. Приведем доказательство этого утверждения на базе теоремы 13, которая демонстрирует приемы, полезные для построения и доказательства других формулировок теорем об альтернативных системах неравенств для неоднородных случаев.

Представим (32) в виде системы линейных уравнений и неравенств от $2n+1$-й переменной, в качестве которых выступают компоненты векторов x^1, x^2 из R^n и величина x_{n+1}

$$\begin{aligned} &Ax^1 - Ax^2 - x_{n+1}b = 0, \\ &x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0,\ x_{n+1} = 1. \end{aligned} \tag{34}$$

Систему (33) представим в виде условия из $2n$ неравенств и одного равенства относительно компонент вектора u из R^m. При этом вместо условия $b^{\mathrm{T}}u \neq 0$ можно зафиксировать какое-либо конкретное ненулевое значение $b^{\mathrm{T}}u$. Имеем систему

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0,\ -A^{\mathrm{T}}u \geq 0,\ -b^{\mathrm{T}}u = 1. \tag{35}$$

Утверждение об альтернативности систем (32) и (33) равносильно утверждению об альтернативности систем (34) и (35). Применим теорему 13 к расширенной матрице $\tilde{A} = [A, -A, b]$ размера $m \times (2n+1)$. Получаем требуемое: одна и только одна из систем (34) или (35) имеет решение.

Теорема 14 доказана.

Теорема 15 (теорема Фаркаша). *Либо имеет решение система*

$$Ax = b,\ x \geq 0, \tag{36}$$

либо разрешима система

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0,\ b^{\mathrm{T}}u < 0. \qquad (37)$$

Теорема 15 имеет ясный геометрический смысл, иллюстрирующий общий принцип «работы» теорем об альтернативах: если система (36) несовместна, т.е. вектор b не является линейной комбинацией столбцов матрицы A с неотрицательными коэффициентами, то существует такая проходящая через нуль гиперплоскость H в пространстве R^m, что векторы-столбцы матрицы A оказываются в положительном полупространстве, образованном этой гиперплоскостью, а вектор b – во внутренности отрицательного полупространства (рис. 7).

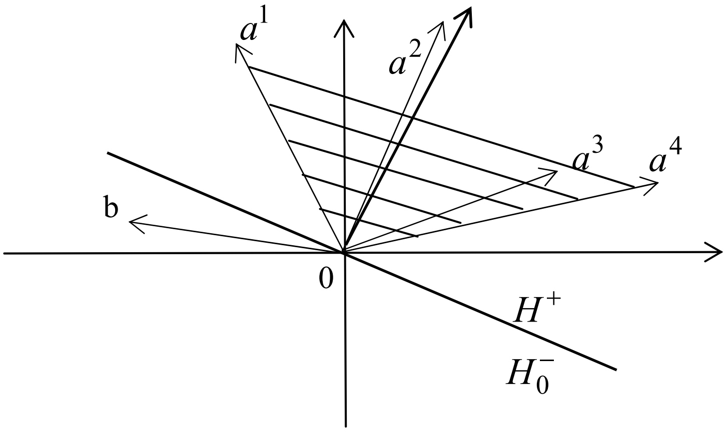

Рис. 7. Геометрическая иллюстрация леммы Фаркаша. Здесь векторы $a^1,...,a^n$ *(векторы-столбцы матрицы* A*) находятся в полупространстве* H^+*, а вектор* b *в полупространстве* H_0^-.

Теорема 16 (теорема Гейла). *Либо существует вектор* $x \in R^n$ *такой, что*

$$Ax \geq b,$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$A^{\mathrm{T}}u = 0,\ u \geq 0,\ b^{\mathrm{T}}u = 1.$$

Задание 9. *Доказать с помощью теоремы 13 теорему Гейла.*

Теорема 17. *Либо имеет решение система*

$$Ax \leq b,\ x \geq 0,$$

либо разрешима система

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0,\ u \geq 0,\ b^{\mathrm{T}}u < 0.$$

Задание 10. *Доказать теорему 17.*

Способы конструирования формулировок теорем об альтернативных системах линейных неравенств общего вида. На базе приведенных в конце раздела 3.3 двух способов построения формулировок теорем об альтернативных однородных системах линейных неравенств можно предложить два способа конструирования формулировок теорем об альтернативных системах линейных неравенств общего вида.

Способ 1. Сначала исходную неоднородную систему преобразуем путем введения дополнительных переменных к виду (30), т.е. у преобразованной системы ограничения на линейные комбинации переменных будут иметь вид системы однородных (с нулевым вектором в правой части) линейных уравнений. Все переменные ограничены условием неотрицательности, а одна из переменных имеет фиксированное единичное значение. Это переменная при фиксированном векторе исходной системы неравенств. Из полученной системы вида (30) с расширенным составом переменных и некоторой специфической матрицей формируем альтернативную систему вида (31). Затем путем преобразований, используя специфику имеющейся матрицы, можем перейти к конкретной альтернативной системе.

Выше это правило было использовано при доказательстве теоремы 14. Доказывается этим способом и теорема 15. Система (36) равносильна системе неравенств

$$Ax - bx_{n+1} = 0\,,$$

$$x \geq 0, \quad x_{n+1} = 1\,.$$

Альтернативной этой системе по теореме 13 будет следующая система линейных неравенств

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0, \quad -b^{\mathrm{T}}u = 1\,.$$

Данная система имеет решение в том и только том случае, если имеет решение строго однородная система линейных неравенств (37). Тем самым доказана теорема 15.

Аналогично можно доказать теоремы 16 и 17.

Таким же способом могут формулироваться и доказываться другие теоремы об альтернативных неравенствах, в том числе внешне более сложного вида. Приведем пример такой теоремы.

Теорема 18. *Для любых матриц* A_1, A_2 *размеров* $m \times n^1$ *и* $m \times n^2$ *и любого вектора* $b \in R^m$ *либо разрешима система уравнений и неравенств относительно векторов переменных* $x^1 \in R^{n_1}$, $x^2 \in R^{n_2}$

$$A_1x^1 + A_2x^2 = b\,,\; x^1 \geq 0\,,$$

либо разрешима следующая система уравнений и неравенств относительно вектора переменных $u \in R^m$

$$(A_1)^{\mathrm{T}}u \leq 0\,,\; (A_2)^{\mathrm{T}}u = 0\,,\; b^{\mathrm{T}}u = 1$$

Задание 11*. Доказать теорему 18.*

Способ 2. Новые формулировки теорем об альтернативах из имеющихся можно получить при взаимной замене исходных матриц на транспонированные, а также, если в имеющихся теоремах в одной или обеих системах линейных неравенств у всех переменных поменять знаки на противоположные. При этом нестрогие неравенства заменяются на нестрогие противоположные неравенства, строгие неравенства заменяются на строгие противоположные.

3.5. Системы двусторонних линейных неравенств

Чем более узкий класс задач рассматривается, тем богаче и интереснее могут быть теоретические результаты о свойствах этого класса задач. В данном разделе приведем теоремы об альтернативах для систем двусторонних линейных неравенств. Для таких систем, как увидим ниже, альтернативная система представляется в виде одного неравенства относительно кусочно-линейной функции, что имеет большие вычислительные удобства.

К указанному типу предлагается относить системы линейных неравенств, для которых: 1) ограничения-неравенства задаются только применительно к отдельным переменным; 2) эти ограничения задаются с обеих сторон (снизу и сверху) на значение каждой переменной; 3) ограничения на значения линейных комбинаций нескольких переменных задаются в виде равенств. Заметим, что ограничения-равенства можно считать частным случаем двусторонних ограничений-неравенств. Действительно, условие $Ax = b$ на вектор переменных x равносильно условию $b \le Ax \le b$.

Вероятно, разработчик любой модели всегда способен оценить, пусть даже с запасом, диапазоны возможных вариаций отдельных переменных. Поэтому в содержательном плане системы двусторонних линейных неравенств можно считать универсальными, хотя они не являются таковыми в математическом отношении – не любая система линейных неравенств путем формальных преобразований сводится к такому виду. В частности, заведомо известно, что множество решений систем двусторонних линейных неравенств ограничено (в том числе может быть пустым), хотя для систем линейных неравенств в общем случае возможны ситуации неограниченности множества решений.

Приводимая ниже теорема может служить в качестве эффективного критерия для выявления случаев несовместности систем линейных уравнений в тех случаях, когда известны (заданы из физических или экономических соображений) диапазоны возможных абсолютных значений отдельных переменных.

Теорема 19 (теорема Дакса). *Пусть заданы матрица A размера $m \times n$, вектор $b \in R^m$ и вектор $d \in R^n_{\oplus}$, т. е. $d \in R^n$ и $d > 0$. Тогда либо имеет решение система*

$$Ax = b,\ -d \le x \le d, \tag{38}$$

либо существует вектор $u \in R^m$ такой, что

$$b^{\mathrm{T}}u + d^{\mathrm{T}}\left|A^{\mathrm{T}}u\right| < 0, \tag{39}$$

где $|Ax|$ – вектор R^n, состоящий из абсолютных значений компонент вектора Ax.

Если приведенную теорему рассматривать в качестве критерия для выявления случая несовместности системы линейных уравнений $Ax = b$, то явно этот критерий предпочтительнее, чем критерий на базе теоремы 14 (Фредгольма). По теореме 14, для того чтобы идентифицировать случай несовместности рассматриваемой системы, требуется указать вектор u такой, что $b^{\mathrm{T}}u < 0$ и $A^{\mathrm{T}}u = 0$. Для такого вектора будет выполняться неравенство (39). Вместе с тем в критерии (39) важно, что здесь не требуется выполнения условия $A^{\mathrm{T}}u = 0$. При этом в дополнение к рассматриваемой системе уравнений необходимо ввести оценки сверху на возможные (по физическим или экономическим соображениям) абсолютные значения переменных. Эти оценки составляют вектор d.

В работах [3, 4] представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований алгоритмов метода внутренних точек для решения систем двусторонних линейных неравенств. В качестве объекта приложения служила линеаризованная модель расчета допустимых режимов электроэнергетической системы (ЭЭС). При этом высокую эффективность продемонстрировал критерий несовместности системы, вытекающий из следующей теоремы.

Теорема 20. *Пусть заданы матрица A – размера $m \times n$, векторы $\overline{x}$, $\underline{x}$ из R^n и векторы $\overline{y}$, $\underline{y}$ из R^m такие, что $\underline{x} < \overline{x}$, $\underline{y} < \overline{y}$. Тогда либо имеет решение система*

$$\underline{y} \le Ax \le \overline{y},\ \underline{x} \le x \le \overline{x}, \tag{40}$$

либо при некотором $u \in R^m$

$$-\overline{y}^{\mathrm{T}}(u)_- - \underline{y}^{\mathrm{T}}(u)_+ + \overline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_+ + \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_- < 0. \tag{41}$$

Здесь $(\ )_+$, $(\ )_-$ – положительная и отрицательная срезки: для любого $z \in R^n$ выражения $(z)_+$, $(z)_-$ обозначают векторы в R^n с компонентами

$$(z)_{+j} = \max\{0, z_j\},\ \ (z)_{-j} = \min\{0, z_j\},\ j = 1, ..., n.$$

Исходная модель расчета режимов ЭЭС является нелинейной. В результате ее итеративной линеаризации появляются системы вида (40). После введения вектора дополнительных переменных $y \in R^m$ систему (40) можно представить в виде

$$Ax - y = 0,\ \ \underline{x} \le x \le \overline{x},\ \ \underline{y} \le y \le \overline{y}. \tag{42}$$

Эту систему можно рассматривать как частный случай системы уравнений и неравенств, рассматриваемой в следующей теореме.

Теорема 21. *Пусть заданы матрица* A *– размера* $m \times n$, *векторы* $\bar{x}$, $\underline{x}$ *из* R^n *такие, что* $\bar{x} > \underline{x}$. *Тогда либо имеет решение система неравенств*

$$Ax = b, \quad \underline{x} \le x \le \bar{x}, \tag{43}$$

либо существует вектор $u \in R^m$ *такой, что*

$$b^{\mathrm{T}}u + \bar{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_+ + \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_- < 0. \tag{44}$$

Если $\underline{x} = -\bar{x}$, то система (43) будет иметь вид системы (38) при $d = \bar{x}$. Условие (44) примет вид условия (39), т.е. теорему 19 можно рассматривать как частный случай теоремы 21.

Систему неравенств (42) можно рассматривать как частный случай системы неравенств (43). Поэтому сформулированный в теореме 20 критерий несовместности можно рассматривать как следствие теоремы 21.

Итак, для доказательства приведенных трех теорем достаточно установить справедливость теоремы 21.

Доказательство теоремы 21. Условие (44) равносильно следующему: существует вектор $u \in R^m$, при котором

$$\varphi(u) > 0, \tag{45}$$

где

$$\psi(u) = b^{\mathrm{T}}u - \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_+ - \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_-).$$

Действительно, при любом $u \in R^m$

$$\psi(-u) = -(b^{\mathrm{T}}u + \bar{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_+ + \underline{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}u)_-).$$

Если при заданном u выполняется неравенство (45), то при $\tilde{u} = -u$ будет выполняться неравенство (44). Если при некотором $\tilde{u}$ выполняется (45), то для вектора $u = -\tilde{u}$ будет выполняться (44).

Преобразуем систему (43). Введем векторы дополнительных переменных y, z из R^n. Получаем

$$Ax = b, \tag{46}$$

$$-x - y = -\bar{x}, \tag{47}$$

$$x - z = \underline{x}, \tag{48}$$

$$y \ge 0, \quad z \ge 0. \tag{49}$$

По теореме 18 альтернативной к системе (46)–(49) будет система линейных уравнений и неравенств

$$A^{\mathrm{T}}u - v + w = 0, \tag{50}$$

$$v \ge 0, \quad w \ge 0, \tag{51}$$

$$\varphi(u, v, w) > 0, \tag{52}$$

где

$$\varphi(u, v, w) = b^T u - \bar{x}^T v + \underline{x}^T w. \tag{53}$$

Для любых векторов $u \in R^n$, $t \in R^n_+$ векторы

$$u, \ v = (A^{\mathrm{T}}u)_+ + t, \ w = -(A^{\mathrm{T}}u) + t \tag{54}$$

будут удовлетворять условиям (50), (51). И наоборот, любые векторы u, v, w, удовлетворяющие условиям (50), (51), имеют вид (54) при некотором $t \geq 0$. Из (53), (54) и неравенства $\overline{x} > \underline{x}$ имеем

$$\varphi(u,(A^T u)_+ + t, -(A^T u)_-) \geq \varphi(u,v,w) \qquad (55)$$

для любых векторов u, v, w, удовлетворяющих (50), (51). Действительно,

$$\varphi(u,v,w) = \varphi(u,(A^{\mathrm{T}} u)_+, -(A^{\mathrm{T}} u)_-) - (\overline{x} - \underline{x})^{\mathrm{T}} t .$$

При этом величина $(\overline{x} - \underline{x})t$ неотрицательная, поскольку $\overline{x} > \underline{x}$, $t \geq 0$.

Согласно определениям функций ψ, φ для любого $u \in R^n$

$$\varphi(u,v,w) = \varphi(u,(A^T u)_+, -(A^T u)_-) . \qquad (56)$$

Из неравенства (55) следует, что для любых векторов u, v, w, удовлетворяющих (50), (51),

$$\psi(u) \geq \varphi(u,v,w) .$$

Следовательно, если выполняется (52), то выполняется условие (45).

И наоборот, если для данного u выполняется (45), то для векторов

$$u, v = (A^T u)_+ , w = -(A^T u)_-$$

будет выполняться неравенство (52) в силу (56). Эти векторы будут удовлетворять, согласно (54), условиям (50), (51).

Итак, условие (45) равносильно наличию решений у системы неравенств (50)–(52).

Теорема доказана.

Задачи и упражнения к главе 3

1. Исследовать функцию на выпуклость
   $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - \cos(x_1 - x_2)$.
2. Решить задачи безусловной минимизации
   1) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 \to \min$,
   2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to \min$.
3. Решить задачу условной минимизации на линейном многообразии
   $2x_1^2 - x_2^2 \to \min,\ 2x_1 + x_2 = 1$.
   Найти множители Лагранжа. Доказать справедливость соотношения $(\nabla f(\bar{x}), \bar{x}) = b^{\mathrm{T}}\bar{u}$ и $\nabla f(\bar{x}) = A^{\mathrm{T}}\bar{u}$, где $\bar{u}$ – множитель Лагранжа ограничений данной задачи.
4. Сконструировать системы неравенств, альтернативные данным строго однородным системам линейных неравенств, в которых A – матрица размера $m \times n$, переменные составляют вектор $x \in R^n$:
   1) $Ax > 0,\ x \geq 0$,
   2) $Ax \geq 0,\ x \geq 0, x \neq 0$.
5. Сконструировать системы неравенств, альтернативные строго однородным системам линейных неравенств. Здесь, A_1, A_2, A_3 – матрицы размеров $m \times n_1, m \times n_2, m \times n_3,\ n_1 + n_2 + n_3 = n$. Переменные составляют векторы $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, x_2 \in R^{n_2}$
   1) $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0,\ x_1 \geq 0,\ x_1 \neq 0, x_2 \geq 0$.
   2) $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0,\ x_2 \geq 0,\ x_2 \neq 0$.
6. Сконструировать системы неравенств, альтернативные данным. Убедитесь, что системы неравенств, альтернативные к полученным альтернативным, совпадают с исходными

1) $-x_1 + x_2 \leq 2$,
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$,
$5x_1 - 2x_2 \leq 10$.

2) $x_1 + 2x_2 \geq -1$,
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$,
$4x_1 - 3x_2 \leq 12$,
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Глава 4. Две области приложения теорем об альтернативных системах линейных неравенств

В данной главе рассмотрим две области применения теорем об альтернативных системах линейных неравенств:

– для конструирования критериев определения несовместности систем линейных уравнений и неравенств;

– для выявления решений с минимальным набором активных ограничений.

В конце данной главы приводится алгоритм решения систем линейных неравенств, который либо идентифицирует ситуацию несовместности их ограничений, либо вырабатывает относительно внутренние точки множества решений систем линейных неравенств.

4.1. Критерий несовместности ограничений систем линейных неравенств

Возможен случай, когда система линейных неравенств не имеет решений – ограничения системы являются противоречивыми или, как еще говорят, несовместными. Иногда этот случай несложно выявить. Например, можно доказать графически, что следующая система с двумя неизвестными не имеет решения

$$x_1 + x_2 = -1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Действительно, прямая на плоскости, состоящая из точек, удовлетворяющих первому условию, не пересекает неотрицательный ортант.

Для систем, состоящих из многих ограничений и переменных, как правило, априори не очевидно, имеют они решения или нет. В любом случае, так как поиск решения систем линейных неравенств осуществляется на ЭВМ, необходимо иметь четкий алгоритмический критерий для выявления несовместности ограничений систем равенств и неравенств.

Этот критерий дают теоремы об альтернативных системах линейных неравенств. Для того чтобы доказательно утверждать о противоречивости ограничений данной системы достаточно установить наличие решения альтернативной системы линейных неравенств. Так, согласно теореме Фаркаша 3.15, для доказательства несовместности приведенной выше системы достаточно найти какое-либо решение системы неравенств относительно одной переменной

$$u \geq 0,\ u \geq 0,\ -u < 0.$$

Очевидно, что ее решением будет любое положительное число.

Для того чтобы воспользоваться теоремами об альтернативных системах линейных неравенств в качестве конструктивного критерия определения несовместности ограничений нет необходимости отдельно осуществлять поиск решения альтернативной системы. В любом из известных алгоритмов поиска решения исходной системы в процессе улучшения решения (минимизации невязок, т.е. некоторых измерителей степени нарушения ограничений) можно определять показатели, являющиеся приближениями к множителям Лагранжа ограничений систем. На основе этих показателей можно осуществлять проверку совместности альтернативной системы линейных неравенств. Если на очередной итерации получим допустимое решение альтернативной системы, то можем констатировать несовместность исходной системы. Более подробно эта общая идея будет проиллюстрирована в алгоритме, приведенном в конце данной главы и в алгоритмах главы 7.

4.2. Критерий для идентификации решений систем линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений

Решения системы линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений. Все ограничения системы линейных неравенств для данного ее решения можно разбить на два класса. Некоторые из ограничений выполняются в виде равенств. Эти ограничения называются **активными** для данного решения. В частности, активными будут все ограничения, априори заданные в форме условий-равенств. Другие ограничения будут выполняться в виде строгих неравенств. Их будем называть **неактивными** ограничениями для данного решения. Рассматриваемые здесь свойства систем линейных неравенств являются обобщением свойств, рассмотренных в разделе 2.1 системы вида (2.1).

Обозначим C – множество номеров ограничений некоторой системы линейных неравенств, т.е. это множество отдельных линейных уравнений и неравенств. Пусть решения данной системы образуют некоторую область X из R^n. Для вектора $x \in X$ обозначим $M(x)$, $N(x)$ подмножества номеров активных и неактивных ограничений:

$$M(x) \bigcup N(x) = C, \quad M(x) \bigcap N(x) = \varnothing .$$

Пример 1. Для системы

$$x_1 + x_2 \le 1 \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 \le 0 \qquad (2)$$

$$x_1 \le 1/2 \qquad (3)$$

при $x_1 = x_2 = 1/2$ подмножество активных ограничений состоит из 1-го, 2-го и 3-го ограничений, т.е. $M(x) = \{1,2,3\}$, так как при подстановке данного решения $x_1 = x_2 = 1/2$ все ограничения системы обращаются в точные равенства. Подмножество номеров неактивных ограничений для данного решения является пустым, т.е. $N(x) = \emptyset$.

Для решения $x_1 = 0, x_2 = 1$ множествами номеров активных и неактивных ограничений будут соответственно $M(x) = \{1\}$, $N(x) = \{2, 3\}$.

Пример 2. Рассмотрим систему линейных неравенств относительно вектора переменных $x \in R^n$

$$Ax = b, \ x \ge 0.$$

Здесь заданными являются матрица A размера $m \times n$ и вектор $b \in R^n$. У этой системы $m + n$ ограничений. Будем считать, что первые n ограничений составляют условия неотрицательности $x_j \ge 0, \ j = 1, \ldots, n$. Остальные ограничения с номерами от $n+1$ до $n+m$ составляют балансовые условия, выражаемые в матричном виде соотношением $Ax = b$. Неактивными для какого-либо решения x данной системы могут быть только ограничения первого типа. Поэтому обязательно $\{n+1, \ldots, n+m\} \subset M(x)$.

В силу выпуклости X для любых x^1 и x^2 из X вектор

$$x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$$

также будет находиться в X. При этом

$$M(x) = M(x^1) \bigcap M(x^2),$$

$$N(x) = N(x^1) \bigcup N(x^2),$$

т.е. активными для вектора x будут только те ограничения, которые были активными и для решения x^1, и решения x^2. Неактивными для x будут ограничения, которые были неактивными хотя бы для одного из решений x^1 или x^2.

Следовательно, в X существуют решения, активные ограничения для которых остаются активными при всех других решениях. Подмножество таких решений обозначим Y. Для любого $y \in Y$ множество номеров активных ограничений одно и то же. Обозначим его

$$M = M(y).$$

Соответственно одним и тем же будет множество номеров неактивных ограничений для любого $y \in Y$. Обозначим его

$$N = N(y).$$

Для любого решения $x \in X$

$$M \subseteq M(x),$$

$$N \supseteq N(x).$$

Эти свойства позволяют назвать Y **множеством решений с мини-**

мальным набором активных ограничений или, что одно и то же, с **максимальным набором неактивных ограничений**.

Относительная внутренность выпуклого множества. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$R_\varepsilon(q) = \left\{ y \in R^n : \left\| y - q \right\| \le \varepsilon \right\}$$

ε-окрестность вектора $q \in R^n$.

Для произвольного множества $Q \subseteq R^n$ подмножество внутренних точек составляют такие векторы $q \in Q$, для которых при некотором $\varepsilon > 0$

$$R_\varepsilon(q) \subseteq Q.$$

Подмножество внутренних точек множества Q будем обозначать $\operatorname{int} Q$. Если $\operatorname{int} Q \ne \emptyset$, то множество Q называется телесным или имеющим внутренность.

Выпуклое множество может быть нетелесным. Например, внутренних точек не имеет отрезок прямой в пространстве R^n при $n \ge 2$. Если же этот отрезок рассматривать только относительно прямой, на которой он расположен, то все его точки (за исключением граничных) можно считать внутренними.

Совокупность точек выпуклой области $Q \subseteq R^n$, являющихся внутренними для области Q относительно минимального линейного многообразия, содержащего эту область, называется множеством относительно внутренних точек области Q и обозначается $ri\,Q$. Итак,

$$ri\,Q = \left\{ q \in Q : \exists\ \varepsilon > 0\ \ Y \bigcap R_\varepsilon(q) \subseteq Q \right\},$$

где

$$Y = Aff(Q)$$

– минимальное линейное многообразие, содержащее Q.

Понятие относительной внутренности выпуклого множества и представленное здесь для него обозначение было введено Р. Рокафелларом [17].

Согласно приведенному определению, если и только если

$$\operatorname{int} Q \ne \emptyset,$$

то

$$ri\,Q = \operatorname{int} Q.$$

Если множество Q содержит несколько векторов, то кроме векторов из $ri\,Q$ оно может (но не обязательно) содержать другие векторы, являющиеся граничными для Q относительно минимального линейного многообразия, содержащего Q.

Задание 1. *Исходя из приведенного выше определения $ri\,Q$, доказать, что когда $Q = \emptyset$ и когда Q состоит из одного вектора множество $ri\,Q$ совпадает с исходным множеством Q.*

Соотношение $Q = ri\,Q$ может выполняться и в других случаях. Для полиэдра, т.е. множества решений системы линейных неравенств, такое равенство возможно лишь в указанных двух вырожденных случаях.

Задание 2. *Доказать, что если полиэдр X не пуст и состоит не из одного вектора, то*

$$ri\,X \subset X.$$

Лемма 1. *Множество решений системы линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений совпадает с относительной внутренностью множества решений этой системы.*

Задание 3. *Доказать лемму 1.*

Решения с минимальным набором активных ограничений представляют интерес во многих аспектах. В частности, большую практическую пользу можно извлечь из того, что с помощью таких решений выявляется набор ограничений, активных при всех решениях данной системы. Множество номеров таких ограничений выше обозначено M. В частности, это может быть использовано для сокращения размера (числа переменных и числа ограничений) рассматриваемой системы: если номер ограничения входит в M, то, независимо имеет ли это ограничение вид условия равенства или неравенства, для всех решений системы оно будет выполняться только в виде равенства. Следовательно, можно одну из переменных по этому условию выразить в виде линейной функции от остальных переменных, входящих в данное условие. Подставив это выражение в остальные ограничения с номерами из M и N, мы исключим из рассмотрения одну переменную и одно ограничение.

Критерий для идентификации решений систем однородных линейных неравенств с минимальным набором активных ограничений. Рассмотрим две системы однородных линейных неравенств. Одна из них относится к системе ограничений для вектора переменных $x \in R^n$:

$$Ax = 0, \quad x \geq 0. \tag{4}$$

Другая система неравенств относится к системе ограничений на вектор переменных $u \in R^m$:

$$A^{\mathrm{T}}u \geq 0. \tag{5}$$

Теорема 3.7 приобретает вид критерия для идентификации решений систем (4) и (5) с минимальным набором активных ограничений.

Теорема 1. *Решение $\overline{x}$ системы линейных неравенств (4) является решением данной системы с минимальным набором активных ограничений, если у системы (5) существует решение $\overline{u}$, при котором выполняется условие дополняющей нежесткости в строгой форме*

$$\max\{\overline{x}_j, (A^{\mathrm{T}}\overline{u})_j\} > 0, \quad j = 1,\dots,n. \tag{6}$$

Решение $\bar{u}$ системы (5) будет решением данной системы с минимальным набором активных ограничений, если существует решение $\bar{x}$ системы (4), при котором выполняется условие дополняющей нежесткости в строгой форме (6).

Критерии для идентификации решений с минимальным набором активных ограничений в общем случае. Применим теорему 1 к системе линейных неравенств

$$Ax - bx_{n+1} = 0,$$

$$x \ge 0, \quad x_{n+1} \ge 0.$$

Данная система имеет решение с $x_{n+1} > 0$ в том и только том случае, если разрешима система неравенств

$$Ax = b, \quad x \ge 0. \tag{7}$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть система (7) непротиворечива. Решение $\bar{x}$ системы линейных неравенств (7) будет иметь минимальный набор активных ограничений в том и только том случае, если существует решение $\bar{u}$ системы неравенств*

$$A^{\mathrm{T}}u \ge 0, \quad b^{\mathrm{T}}u = 0, \tag{8}$$

такое, что

$$(\bar{x} + A^{\mathrm{T}}\bar{u}) > 0.$$

Поиск решения с минимальным набором активных ограничений. Для нахождения таких решений могут использоваться те же алгоритмы, которые применяются для поиска любого решения систем линейных неравенств. Рассмотрим систему линейных неравенств с ($n + m - 1$)-й переменной:

$$A^{\mathrm{T}}u \ge 0, \quad b^{\mathrm{T}}u = 0, \tag{9}$$

$$Ax - x_{n+1}b = 0, \quad x \ge 0, \quad x_{n+1} \ge 1, \tag{10}$$

$$(x_j + (A^{\mathrm{T}}u)_j) \ge 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Заметим, если и только если система (7) совместная, то данная система имеет решение. Пусть векторы $\tilde{u} \in R^m$, $\tilde{x} \in R^n$ и величина $\tilde{x}_{n+1}$ являются решением системы (9)–(11). Тогда вектор

$$\bar{x} = \frac{1}{\tilde{x}_{n+1}}\tilde{x}$$

будет решением системы (7) с минимальным набором активных ограничений, вектор $\tilde{u}$ будет решением системы (8) с минимальным набором активных ограничений.

Конечно, поиск относительно внутренней точки множества решений системы линейных неравенств (7) путем решения системы (9)–(11) выглядит несколько громоздко. У системы (9)–(11) значительно больше переменных и уравнений, чем у исходной системы (7). Следует отметить, что имеются такие алгоритмы решения систем линейных неравенств, которые всегда приводят к решениям с минимальным набором активных ограничений, если условия системы непротиворечивы. Это алгоритмы внутренних точек. Один из таких алгоритмов приводится ниже.

4.3. Алгоритм внутренних точек для решения систем линейных неравенств

В данном разделе приводится описание алгоритма решения системы линейных неравенств, приводящего к относительно внутренним точкам множества решений, если система совместна. Если система несовместна, то данный алгоритм приводит к относительно внутренним точкам множества решений альтернативной системы линейных неравенств, что позволяет идентифицировать противоречивость условий исходной системы.

У изложенного ниже алгоритма на каждой итерации происходит уменьшение невязок ограничений-равенств. При этом ограничения-неравенства на всех итерациях выполняются в строгой форме, т.е. вырабатываемые итеративные приближения к решению исходной системы находятся внутри множества векторов, удовлетворяющих ограничениям-неравенствам. Поэтому рассматриваемый алгоритм называется алгоритмом внутренних точек.

Формулировка задачи. Заданы матрица A размера $m \times n$, вектор $b \in R^m$. Рассматривается задача поиска вектора $x \in R^n$, удовлетворяющего условиям

$$Ax = b, \; x \geq 0 . \qquad (12)$$

Будем считать, что $rank\ A = m$.

Исходные приближения. В качестве стартовой точки для расчетов может использоваться любой вектор $x \in R^n$ со всеми неотрицательными компонентами. Например, можно положить

$$x_j^0 = 1, \; j = 1, \ldots, n .$$

Вычислительный процесс. Обозначим $k = 0, 1, 2, \ldots$ номер итерации вычислений. В начале $k-$й итерации задан вектор $x^k > 0$, т. е. такой, у которого все компоненты положительные. Этим вектором служит исходное приближение (при $k = 0$) или решение, полученное на предыдущей итерации (при $k > 0$).

Вычислим вектор невязок ограничений-равенств $r^k \in R^m$ по формуле

$$r^k = b - Ax^k. \quad (13)$$

Если

$$r^k = 0,$$

то вычисления прекращаются. Вектор x^k будет решением системы (12). Причем это будет решение с минимальным набором активных ограничений, поскольку для этого решения все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме.

Если

$$r^k \neq 0,$$

то вектор x^k не является решением системы (12). Осуществляем итерацию улучшения решения.

В начале итерации вычисляется вектор весовых коэффициентов $d^k \in R^n$ по правилу

$$d_j^k = (x_j^k)^2, j = 1, \ldots, n. \quad (14)$$

Затем определяем направление корректировки как результат решения задачи поиска вектора $s \in R^n$ из условий

$$1/2\sum(s_j)^2 / d_j^k \to \min, \quad As = r^k. \quad (15)$$

Данную задачу будем называть **вспомогательной задачей поиска направления корректировки решения**. Получаемое в результате ее решения направление корректировки решения обозначим s^k.

Задание 4. *Доказать, что вспомогательная задача поиска направления корректировки решения не имеет решения в том и только том случае, если ее ограничения* $As = r^k$ *противоречивые.*

Задание 5. *Доказать, что вспомогательная задача поиска направления корректировки решения не имеет решения в том и только том случае, если несовместна система линейных уравнений*

$$Ax = b. \quad (16)$$

Отметим, что случай несовместности системы уравнений (16) выявляется сразу на нулевой итерации. Признаком этого случая является отсутствие решения вспомогательной задачи.

Вспомогательная задача (15) является частным случаем рассмотренной в начале главы 3 задачи минимизации дифференцируемой выпуклой функции на линейном многообразии. По условиям оптимальности Лагранжа (теорема 3.3а) для того чтобы вектор s был решением вспомогательной задачи (15), необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$As = r^k, \quad (17)$$

$$D_k A^T u = s, \quad (18)$$

где

$$D_k = diag\ d^k$$

– диагональная матрица размера $n \times n$ с весовыми коэффициентами d_j^k по диагонали.

Из (17), (18) следует, что

$$s^k = D_k A^T u^k, \tag{19}$$

где вектор u^k является решением следующей системы линейных уравнений с m неизвестными, составляющими вектор $u \in R^m$:

$$(A D_k A^T)u = r^k. \tag{20}$$

Матрица условий данной системы $AD^k A^T$ является симметричной неотрицательно определенной.

После вычисления направления корректировки решения вычисляется шаг корректировки по правилу

$$\lambda_k = \min\left\{1, \tilde{\lambda}_k\right\}, \tag{21}$$

где

$$\tilde{\lambda}_k = \gamma \cdot \min\left\{x_j^k / -s_j^k : j \in J_-(s^k)\right\},$$

$$J_-(s^k) = \left\{j : s_j^k < 0\right\},$$

γ – параметр алгоритма, заданная величина из интервала (0, 2/3).

Если

$$J_-(s^k) = \varnothing,$$

то полагаем

$$\lambda_k = 1.$$

После вычисления шага осуществляем итеративный переход. Полагаем

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k. \tag{22}$$

После этого переходим к началу следующей итерации вычислений.

Задание 6. *Доказать, что*

$$x^{k+1} \geq (1-\gamma)x^k. \tag{23}$$

Из (23) и условия $\gamma \in (0, 2/3)$ следует, что $x^{k+1} > 0$, поскольку $x^k > 0$.

Задание 7 . *Доказать, что*

$$r^{k+1} = (1-\lambda_k)r^k. \tag{24}$$

Из правил вычисления шага корректировки решения следует, что $\lambda_k \in (0,1]$. Поэтому соотношение (19) означает, что на всех итерациях происходит монотонное сокращение абсолютного значения всех компонент вектора невязок ограничений-равенств.

Соотношение (19) объясняет, почему шаг корректировки определяется таким, чтобы он не превышал единицу. При $\lambda_k = 1$ получаем $r^{k+1} = 0$. Следовательно, вектор x^{k+1} будет решением системы линейных неравенств (12).

Пример 3. Найдем решение системы линейных неравенств

$$x_1 + x_2 = 3,$$
$$-x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

алгоритмом внутренних точек. Здесь матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В качестве стартовой точки, следуя алгоритму, выберем вектор с положительными компонентами $(x^0)^T = (1, 1)$.

Вычислим вектор невязок,

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Получили, что $r^0 \neq 0$. Следовательно, вектор x^0 не является решением системы.

Осуществляем итерацию улучшения решения. Вычислим вектор весовых коэффициентов

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1^2 \\ 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вспомогательная задача нахождения корректировки решения примет вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s_1^2}{1} + \frac{s_2^2}{1}\right) \to \min,$$
$$s_1 + s_2 = 1,$$
$$-s_1 + s_2 = 1.$$

Решаем систему линейных уравнений относительно вектора u^1 (20):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Откуда имеем $u_1^0 = u_2^0 = 1/2$. Находим направление корректировки решения s^0 согласно (19)

$$s^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

После вычисления направления корректировки решения вычисляем шаг корректировки по правилу (21). Получаем $\lambda_0 = 1$, так как в данном случае $J_-(s^0) = \varnothing$ – у вектора направления корректировки нет отрицательных компонент. Из того, что $\lambda_0 = 1$ вытекает, что после корректировки решения на нулевой итерации получим решение рассматриваемой системы.

Осуществляем итеративный переход алгоритма

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 s^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Находим для x^1 вектор невязок

$$r^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Как и ожидалось, полученный вектор невязок нулевой, поэтому вычисления прекращаются. Решением системы является вектор $x^T = (1,2)$.

Пример 4. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 3, \\ &-x_1 - x_2 = 1, \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ и $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В качестве стартовой точки возьмем $x^0 = (1, 1)^T$. Вычислим вектор невязок

$$r^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $r^0 \neq 0$, то вектор x^0 не является решением системы. Осуществляем итерацию улучшения. Вектор весовых коэффициентов

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1^2 \\ 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вспомогательная задача нахождения корректировки решения примет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{s_1^2}{1} + \frac{s_2^2}{1}\right) \to \min, \\ &s_1 + s_2 = 1, \\ &-s_1 - s_2 = 1. \end{aligned}$$

Ищем направление корректировки решения, следуя формулам (19), (20). Имеем систему уравнений вида (20)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

или, что то же самое, систему

$$\begin{aligned} &2u_1^0 - 2u_2^0 = 1, \\ &-2u_1^0 + 2u_2^0 = 3. \end{aligned}$$

Данная система несовместна, что говорит о том, что вспомогательная задача не имеет решения. Следовательно, исходная система неравенств несовместна из-за того, что противоречива система ограничений, заданных в виде равенств. Это выявилось сразу же на первой итерации.

Обозначим

$$X = \left\{ x \in R^n : Ax = b,\ x \ge 0 \right\}$$

множество решений системы линейных уравнений и неравенств (12). Ниже приводятся три теоремы без доказательств в силу их громоздкости. Утверждения, содержащиеся в этих теоремах, доказаны в работах [12, 13].

Для вектора $x \in R^n$ обозначим

$$J(x) = \left\{ j : x_j \ne 0 \right\}$$

– носитель вектора, множество номеров его ненулевых компонент,

$$J_0(x) = \left\{ j : x_j = 0 \right\}$$

– множество номеров нулевых компонент вектора.

Свойства алгоритма при наличии решения у системы линейных уравнений и неравенств. Приводимые ниже две теоремы означают, что изложенный в данном параграфе алгоритм внутренних точек приводит к вектору, находящемуся в относительной внутренности множества решений системы линейных неравенств (в случае непротиворечивости условий).

Теорема 3. *Если система (12) совместна,* $X \ne \varnothing$ *и среди решений системы имеется решение* $x \in X$ *со всеми положительными компонентами* $J_0(x) = \varnothing$, *то через конечное число итераций будет получено решение* $x^k \in riX$, *для которого все компоненты положительны,* $J_0(x^k) = \varnothing$.

Теорема 4. *Если система (12) совместна,* $X \ne \varnothing$ *и* $J(x) \ne \varnothing$ *для* $x \in riX$, *то существует* $\bar{x} \in ri\bar{X}$ *такой, что*

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x}.$$

При этом

$$\lim_{k \to \infty} \left\| r^{k+1} \right\| \Big/ \left\| r^k \right\| = (1 - \gamma), \ \lim_{k \to \infty} \left\| x^{k+1} - \bar{x} \right\| \Big/ \left\| x^k - \bar{x} \right\| = (1 - \gamma). \qquad (25)$$

Соотношения (25) означают, что изложенный здесь алгоритм сходится линейно, т. е. сходится со скоростью геометрической прогрессии к относительно внутренней точке множества решений системы линейных неравенств. Причем асимптотически коэффициент линейной сходимости не зависит от задачи, а зависит только от значения параметра γ.

В реальных расчетах для окончания вычисления вследствие получения относительно внутренней точки множества решений системы (12) с заданной точностью можно воспользоваться условием

$$\left\| r^k \right\| \le \varepsilon,$$

где ε – положительная, достаточно малая величина.

Идентификация случая несовместности системы линейных неравенств. Обозначим

$$U = \{u \in R^m : A^T u \le 0, b^T u = 1\}$$

– множество решений альтернативной к (12) системы линейных неравенств. Согласно теореме Фаркаша (3.15), если исходная система имеет решение $X \ne \varnothing$, то $U = \varnothing$. Если и только если исходная система не имеет решения, то $U \ne \varnothing$.

Введем величины

$$F_k = \sum (s_j^k)^2 / d_j^k, \; j = 1, \dots, n,$$

$$\beta_0 = 1, \; \beta_k = \prod_{t=1}^{k} (1 - \lambda_t), \; k = 1, 2, \dots$$

Пусть

$$\tilde{u}^k = \frac{\beta_k}{F_k} u^k,$$

где u^k – вектор, являющийся решением системы линейных уравнений (20).

Теорема 5. *Если система линейных неравенств (12) несовместна и при этом система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, то изложенный в данном параграфе алгоритм внутренних точек вырабатывает последовательность векторов $x^k, r^k, \tilde{u}^k$ и величины β_k такие, что*

$$\lim_{k \to \infty} x^k = \bar{x},$$

$$\lim_{k \to \infty} r^k = \bar{r}$$

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{u}^k = \bar{u},$$

$$\lim_{k \to \infty} \beta_k = \bar{\beta},$$

где

$$\bar{\beta} \in (0,1),$$

$$b - A\bar{x} = \bar{r}, \; \bar{r} = \bar{\beta} r^0, \bar{x} \ge 0,$$

$$\bar{u} \in riU.$$

При этом

$$\lim_{k \to \infty} \left\| r^{k+1} - \bar{r} \right\| \Big/ \left\| r^k - \bar{r} \right\| = (1 - \gamma), \quad \lim_{k \to \infty} \left\| x^{k+1} - \bar{x} \right\| \Big/ \left\| x^k - \bar{x} \right\| = (1 - \gamma).$$

В качестве конструктивного критерия для идентификации случая несовместности системы (12) можно использовать условие

$$\left\| (A^T \tilde{u}^k)_+ \right\| + \left| b^T \tilde{u}^k - 1 \right| \le \varepsilon$$

при заданном достаточно малом $\varepsilon > 0$. Это условие означает, что с заданной точностью, выражаемой числом ε, достигнуто решение альтернативной к (12) системы линейных неравенств.

Проиллюстрируем идентификацию случая несовместности системы линейных неравенств на примере.

Пример 5. Найдем решение системы линейных неравенств

$$-x_1 + x_2 = 2,$$
$$x_1 + x_2 = 0,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

алгоритмом внутренних точек. Здесь матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В качестве стартовой точки выберем вектор $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1$.

Вычислим вектор невязок

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Получили, что $r^0 \ne 0$, следовательно, вектор x^0 не является решением системы.

Осуществляем итерацию улучшения. Вычислим вектор весовых коэффициентов

$$d^0 = \begin{bmatrix} 1^2 \\ 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Вспомогательная задача нахождения корректировки решения принимает вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{s_1^2}{1} + \frac{s_2^2}{1}\right) \to \min,$$
$$-s_1 + s_2 = 2,$$
$$s_1 + s_2 = 0.$$

Решаем систему линейных уравнений относительно вектора u^1 (20):

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Откуда $u_1^0 = -1, \ u_2^0 = -1.$ Находим направление корректировки решения s^0 согласно (19)

$$s^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После вычисления направления корректировки решения вычисляем шаг корректировки по правилу (21). Получаем $\lambda_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, так как в данном случае $J_-(s^0) = \{1\}$.

Находим значение величин

$$F_0 = \frac{(-2)^2}{1} + \frac{0^2}{1} = 4,\ \beta_0 = 1,\ \tilde{u}^0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Альтернативной к исходной системе по лемме Фаркаша будет система неравенств

$$\begin{aligned} &-u_1 + u_2 \le 0, \\ &u_1 + u_2 \le 0, \\ &2u_1 > 0. \end{aligned}$$

Подставляя полученный вектор $\tilde{u}^0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ в альтернативную систему, получаем $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \le 0,\ \frac{1}{2} > 0$, что непротиворечиво. Следовательно, исходная система неравенств не имеет решения со всеми неотрицательными компонентами. Таким образом, получили случай, описанный в теореме 5, когда система $Ax = b$ совместна, но не имеет неотрицательных решений.

Задания и упражнения к главе 4

1. Доказать, что система

$$\begin{aligned} &2x_1 - 8x_2 = 0, \\ &x_1 + x_2 = 0, \\ &x \ge 0,\ x \ne 0 \end{aligned}$$

несовместна (применить теорему Гордана).

2. Доказать, используя альтернативный подход, что система неравенств

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ &2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5 \\ &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{aligned}$$

несовместна.

3. Доказать несовместность системы неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 = -4, \\ &2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ &x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \end{aligned}$$

применив теорему Фредгольма.

4. Доказать отсутствие неотрицательных решений у системы уравнений с использованием леммы Фаркаша

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$$

5. Доказать, используя теорему Гейла, что система неравенств

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq -2,$$
$$3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \leq 3$$

не имеет решения.

6. Доказать, исходя из теоремы 3.17, что у неравенств

$$5x_1 - 4x_2 \leq 7$$
$$-3x_1 + 3x_2 \leq -5$$

нет неотрицательных решений.

7. Доказать, применив теорему 3.18, что система

$$x_1 - 3x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 = -1$$
$$x_1 \geq 0$$

несовместна.

8. Решить системы линейных неравенств алгоритмом внутренних точек

1) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$$2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

2) $3x_1 + 5x_2 = 15$

$$5x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Глава 5. Теория двойственности для задач оптимизации с линейными ограничениями

Многие прикладные математические модели (в т.ч. экономических, физических, биологических процессов и явлений) представляются в виде задач оптимизации – поиска экстремума (максимума или минимума) некоторой функции (называемой целевой функцией) при ограничениях на переменные. Иногда ограничения отсутствуют – такая ситуация называется задачей безусловной оптимизации.

Изучением свойств задач оптимизации, разработкой и обоснованием алгоритмов их решения занимается теория оптимизации. Особенно активно теория и методы оптимизации стали развиваться после второй мировой войны в связи с необходимостью решения проблем составления наиболее рациональных планов (программ) в военных областях и экономике. По сложившейся традиции задачи оптимизации называют также задачами математического программирования. Соответственно, синонимом к термину «теория оптимизации» является термин «теория математического программирования».

Важной составляющей теории оптимизации является теория двойственности. Для широкого класса задач математического программирования применяются специальные конструкции – двойственные задачи оптимизации. Двойственная задача используется для доказательства оптимальности полученного решения, для теоретического обоснования алгоритмов, при анализе устойчивости оптимальных решений к варьированию исходных данных, при экономической или физической интерпретации решения. Двойственная задача может служить основой для конструирования алгоритмов решения исходной задачи.

Основу теории двойственности составляют множители Лагранжа ограничений исходной задачи оптимизации. Ранее, в начале главы 3, множители Лагранжа рассматривались нами для задачи минимизации выпуклой функции при ограничениях в виде системы линейных уравнений. Свойства оптимальных решений такой задачи использовались при доказательстве теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

В свою очередь теоремы об альтернативных системах линейных неравенств могут служить основой для построения теории двойственности линейного и нелинейного программирования. Здесь ограничимся рассмотрением задач минимизации выпуклых функций при линейных ограничениях в форме равенств и неравенств. Ограничения в форме линейных неравенств являются новым моментом по отношению к рассмотренным в начале главы 3 задачам.

5.1. Двойственные задачи линейного программирования

Задача оптимизации, у которой целевая функция и все функции в ограничениях линейные, называется задачей **линейного программирования**. Такие задачи имеют большое прикладное значение. В этом виде представляются многие экономические модели [5, 14, 15]. При этом теория линейного программирования служит основой для многих классов задач **нелинейного программирования**, у которых целевая функция и ограничения могут быть нелинейными.

Теория двойственности линейного программирования представлена во многих учебниках по линейному программированию (например, [9]). Это наиболее развитая часть теории оптимизации. Одна из целей данного раздела состоит в том, чтобы продемонстрировать возможность компактного и более полного, чем обычно делается во многих учебниках по линейному программированию, изложения теории двойственности в линейной оптимизации на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

Будем рассматривать две задачи линейного программирования:

$$c^{\mathrm{T}}x \to \min,\ x \in X, \tag{1}$$

$$b^{\mathrm{T}}u \to \max,\ u \in U, \tag{2}$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, A – матрица $m \times n$. Эти задачи тесно взаимосвязаны и называются **взаимно-двойственными**.

Множества

$$X = \{x \in R^n:\ Ax = b,\ x \ge 0\},$$

$$U = \{u \in R^m : g(u) \ge 0\}$$

составляют допустимые решения задач (1), (2). Здесь

$$g(u) = c - A^{\mathrm{T}}u$$

– вектор-функция от вектора $u \in R^m$ с компонентами $g_j(u),\ j = 1,\ldots,m.$

Множества оптимальных решений задач (1), (2) обозначим

$$\overline{X} = Arg\min\{c^{\mathrm{T}}x:\ x \in X\},$$

$$\overline{U} = Arg\max\{b^{\mathrm{T}}u : u \in U\}. \tag{3}$$

Введем функцию от векторов $x \in R^n$, $u \in R^m$

$$f(x,u) = c^{\mathrm{T}}x - b^{\mathrm{T}}u. \tag{4}$$

Задание 1. *Доказать, что для любых* $(x,u) \in R^n \times R^m$ *при условии* $Ax = b$ *выполняется равенство*

$$f(x,u) = \sum x_j g_j(u). \tag{5}$$

Введем множества **рецессивных направлений задач линейного программирования (1), (2)**:

$$\widetilde{X} = \{s \in R^n : As = 0,\ s \geq 0,\ c^{\mathrm{T}} s < 0\},$$

$$\widetilde{U} = \{v \in R^m : A^{\mathrm{T}} v \leq 0,\ b^{\mathrm{T}} v > 0\}.$$

Множество $\widetilde{X}$ состоит из направлений неограниченного убывания целевой функции задачи (1), не выводящих из области ее допустимых решений.

Задание 2. *Показать, что* для $x \in X$, $s \in \widetilde{X}$ *вектор* $x(\lambda) = x + \lambda s$ *при любом* $\lambda \geq 0$ *будет находиться в* X *и* $c^{\mathrm{T}} x(\lambda) \to -\infty$, *если* $\lambda \to \infty$.

Множество $\widetilde{U}$ состоит из направлений неограниченного возрастания целевой функции задачи (2), не выводящих из области ее допустимых решений.

Задание 3. *Продемонстрировать, что для* $u \in U$, $v \in \widetilde{U}$ *вектор* $u(\lambda) = u + \lambda v$ *при любом* $\lambda \geq 0$ *будет находиться в* U *и* $b^{\mathrm{T}} u(\lambda) \to \infty$, *если* $\lambda \to \infty$.

Согласно теореме Фаркаша 3.15, системы неравенств, решения которых образуют множества X и $\widetilde{U}$, являются альтернативными. Справедливо одно и только одно из двух

$$\text{либо } X \neq \varnothing, \widetilde{U} = \varnothing, \text{ либо } X = \varnothing, \widetilde{U} \neq \varnothing. \tag{6}$$

Также альтернативными (по теореме Гейла 3.16) являются системы неравенств, решения которых образуют множества U и $\tilde{X}$. Справедливо одно и только одно из двух

$$\text{либо } U \neq \varnothing, \widetilde{X} = \varnothing, \text{ либо } U = \varnothing, \widetilde{X} \neq \varnothing. \tag{7}$$

Теорема 1. *Для задач (1), (2) возможна одна из четырех ситуаций.*

1. $X = \varnothing, U = \varnothing$. *Тогда* $\overline{X} = \varnothing$, $\overline{U} = \varnothing$,

$$\tilde{X} \neq \varnothing, \tilde{U} \neq \varnothing. \tag{8}$$

2. $X = \varnothing, U \neq \varnothing$. *Тогда* $\overline{X} = \varnothing$, $\overline{U} = \varnothing$, *целевая функция задачи (2) не ограничена сверху на множестве допустимых решений этой задачи,*

$$\tilde{X} = \varnothing, \tilde{U} \neq \varnothing. \tag{9}$$

3. $X \neq \varnothing$, $U = \varnothing$. *Тогда* $\overline{X} = \varnothing$, $\overline{U} = \varnothing$, *целевая функция задачи (1) не ограничена снизу на множестве допустимых решений этой задачи,*

$$\tilde{X} \neq \varnothing,\ \tilde{U} = \varnothing. \tag{10}$$

4. $X \neq \varnothing$, $U \neq \varnothing$. *Тогда* $\overline{X} \neq \varnothing, \overline{U} \neq \varnothing$,

$$\tilde{X} = \varnothing,\ \tilde{U} = \varnothing. \tag{11}$$

Для любых $x \in X$, $u \in U$,

$$f(x,u) \geq 0 \qquad (12)$$

Для любых $\overline{x} \in \overline{X}$, $\overline{u} \in \overline{U}$

$$f(\overline{x},\overline{u}) = 0, \qquad (13)$$

и выполняются условия дополняющей нежесткости

$$\overline{x}_j g_j(\overline{u}) = 0, \ j = 1,...,n. \qquad (14)$$

Существуют оптимальные решения $\overline{x} \in \overline{X}$, $\overline{u} \in \overline{U}$ *для которых условия дополняющей нежесткости выполняются в строгой форме*

$$(\overline{x}_j + g_j(\overline{u})) > 0, \ j = 1,...,n. \qquad (15)$$

Доказательство. Из альтернатив (6), (7) и соотношений $\overline{X} \subseteq X$, $\overline{U} \subseteq U$ следуют утверждения для первых трех ситуаций.

Осталось доказать утверждения для четвертого из рассматриваемых случаев, когда $\overline{X} \neq \varnothing$, $\overline{U} \neq \varnothing$. Тогда $\widetilde{X} = \varnothing$, $\widetilde{U} = \varnothing$, что следует из альтернатив (6), (7). При $x \in X$, $u \in U$ из (5), поскольку $x \geq 0$ и $g(u) \geq 0$ вытекает неравенство (12), согласно которому $c^T x \geq b^T u$.

Из (12) следует, что $\overline{X} \neq \varnothing$, $\overline{U} \neq \varnothing$. Обозначим d – оптимальное значение целевой функции задачи (1):

$$d = \min c^{\mathrm{T}} x, \ x \in X.$$

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$Ax = b, \qquad (16)$$

$$c^{\mathrm{T}} x + x_{n+1} = d, \qquad (17)$$

$$x \geq 0, \ x_{n+1} \geq 0, \qquad (18)$$

относительно вектора переменных $x \in R^n$ и дополнительной переменной x_{n+1}.

Из условия $X \neq \varnothing$ и определения d следует, что система (16)–(18) имеет решение. Для любого ее решения $\overline{x} \in R^n$, $\overline{x}_{n+1}$, вектор $\overline{x}$ будет оптимальным решением задачи (1), $\overline{x} \in \overline{X}$ и при этом $\overline{x}_{n+1} = 0$.

Последнее означает существование решения у следующей системы линейных неравенств относительно вектора переменных $u \in R^m$ и дополнительной переменной u_{m+1}:

$$A^{\mathrm{T}} u + c u_{m+1} \leq 0, \qquad (19)$$

$$b^{\mathrm{T}} u + d u_{m+1} = 0, \qquad (20)$$

$$u_{m+1} = -1. \qquad (21)$$

Для любого решения этой системы, составляющего вектор $\overline{u} \in R^{m+1}$ и величину $\overline{u}_{m+1}$, вектор $\overline{u}$ будет допустимым решением двойственной задачи. Причем будет выполняться равенство (13) $c^{\mathrm{T}}\overline{x} = d = b^T\overline{u}$. Это в силу неравенства (12) означает, что $\overline{u} \in \overline{U}$. Из (13) и (4), (5) имеем (14).

Из теоремы 3.7 применительно к системам неравенств (16)–(18) и (19)–(21) следует существование решений, удовлетворяющих условию (15).

Теорема 1 доказана.

Замечания. По введенной И. И. Ереминым классификации, первые три ситуации называются несобственными задачами линейного программирования III, I и II рода. Идея использования для этой классификации множеств рецессивных направлений $\tilde{X}, \tilde{U}$ получена на основе статьи Н. Н. Астафьева [2].

Соотношения (8)–(11) могут быть полезными для формирования конструктивных критериев выявления случаев отсутствия оптимальных решений у задач линейного программирования. Согласно приведенной теореме у обеих задач (1), (2) либо имеются оптимальные решения, либо не имеются. Случай, когда одна задача имеет оптимальное решение, а другая не имеет, невозможен. Причины отсутствия решений у взаимно-двойственных задач линейного программирования могут быть разными. В теореме выявлены три возможные причины этого: несовместность ограничений задачи (1), задачи (2) и обеих задач (1) и (2). Согласно (8)–(11) для того, чтобы констатировать отсутствие оптимальных решений обеих задач (1), (2), достаточно найти либо вектор $x \in \tilde{X}$, либо вектор $u \in \tilde{U}$.

5.2. Относительно внутренние точки оптимальных решений

Согласно доказанной теореме, среди оптимальных решений задач (1), (2) существуют особые решения, для которых справедливо не только условие дополняющей нежесткости (14), но и соотношение (15). Это означает, что для любого $j = 1,...,n$ либо $\overline{x}_j = 0$ и $g_j(\overline{u}) > 0$, либо $g_j(\overline{u}) = 0$ и $\overline{x}_j > 0$. Такие решения $\overline{x}$, $\overline{u}$ имеют максимальные среди всех оптимальных решений нерасширяемые наборы неактивных ограничений (т. е. условий-неравенств, выполняемых как строгие неравенства).

Решения $\overline{x}$, $\overline{u}$, удовлетворяющие условиям дополняющей нежесткости в строгой форме, будут относительно внутренними точками множеств оптимальных решений задач (1), (2). Оптимальные решения из $ri\overline{X}$ и $ri\overline{U}$ имеют ряд преимуществ по сравнению с произвольными оптимальными решениями из $\overline{X}$ и $\overline{U}$. В частности, такие особые решения полезны при анализе устойчивости решений задач (1), (2) к варьированию коэффициентов матрицы A и векторов c и b. Проиллюстрируем это на примере анализа устойчивости решения к варьированию коэффициентов вектора c.

Устойчивость решения к варьированию коэффициентов целевой функции задачи (1). Пусть $\overline{u} \in \overline{U}$. Для любого j, принадлежащего множеству неактивных ограничений, т.е. таких, что $g_j(\overline{u}) > 0$, при достаточно малых изменениях величины c_j решение $\overline{u}$ будет оставаться оптимальным для задачи (2). Точнее, оно будет оставаться оптимальным при замене величины c_j на величину $c_j - \Delta_j$, если $\Delta_j \le g_j(\overline{u})$. Тогда любое решение $\overline{x} \in \overline{X}$ также будет оставаться оптимальным решением задачи (1).

Если же j принадлежит множеству активных ограничений задачи (2), т.е. $g_j(\overline{u}) = 0$, то при сколь угодно малом уменьшении величины c_j вектор $\overline{u}$ престает быть оптимальным и даже допустимым решением задачи (2). Но отсюда не следует, что вектор $\overline{x} \in \overline{X}$ перестает быть оптимальным решением задачи (1).

Когда $\overline{u} \in ri\overline{U}$, то можно точно определить, какие коэффициенты c_j можно варьировать без изменения множества оптимальных решений задачи (1), а какие – нельзя.

С определенной условностью можно говорить, что решение $\overline{u} \in ri\overline{U}$ устойчивее, чем оптимальное решение задачи (2), не принадлежащее $ri\overline{U}$, поскольку это решение $\overline{u}$ будет иметь меньший по сравнению с любым решением из $\overline{U}$ набор активных ограничений. В частности, для решения $\overline{u} \in ri\overline{U}$ будет наибольшим набор коэффициентов c_j, допускающих варьирование без изменения оптимальности данного решения.

Описание множеств оптимальных решений взаимно двойственных задач линейного программирования. Относительно внутренние точки могут эффективно использоваться для описания множеств оптимальных решений. Введем специальные обозначения для множеств номеров активных и неактивных ограничений неравенств на знак переменных. Для $x \in R_+^n$ положим

$$J_0(\overline{x}) = \{j : \overline{x}_j = 0\},\ J(\overline{x}) = \{j : \overline{x}_j > 0\}.$$

Если известно, что $\overline{x} \in ri\overline{X}$, то получаем следующее представление множеств оптимальных решений:

$$\overline{X} = \{x \in R^n :\ Ax = b,\ x \ge 0,\ \ \overline{x}_j = 0,\ j \in J_0(\overline{x})\},$$

$$\overline{U} = \{u \in R^n :\ g(u) \ge 0,\quad g_j(u) = 0,\ j \in J(\overline{x})\}.$$

На основе таких описаний множеств оптимальных решений легко можно определить единственность или неединственность оптимальных решений задач (1), (2). Выяснение вопроса о единственности оптимального решения задачи (1) сводится к установлению линейной зависимости или независимости столбцов матрицы A с номерами из $J(\bar{x})$. Если эти столбцы линейно независимы, то полученное решение является единственным оптимальным решением задачи. Если же они линейно зависимы, то существуют другие оптимальные решения.

Многокритериальные задачи линейной оптимизации с лексикографически упорядоченными целевыми функциями. Если используются алгоритмы решения задач линейного программирования, всегда вырабатывающие относительно внутренние точки множества оптимальных решений, то сильно упрощается решение многокритериальных задач последовательной линейной оптимизации. Под задачей последовательной линейной оптимизации в области

$$X = \left\{ x \in R^n : \ Ax = b, \ x \ge 0 \right\}$$

с целевыми функциями

$$c_1^T x, \ c_2^T x, \ldots, c_K^T x$$

будем понимать следующую последовательность задач линейного программирования: найти величины $F^k, k = 1, \ldots, K$ и вектор $x \in X$ из условий

$$F^1 = \min \left\{ c_1^T x : \ x \in X \right\},$$

$$F^2 = \min \left\{ c_2^T x : \ x \in X, c_1^T x = F^1 \right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^K = \min \left\{ c_K^T x : \ x \in X, c_1^T x = F^1, k = 2, \ldots, K \right\}.$$

Такие задачи возникают при наличии нескольких критериев, между которыми задан жесткий приоритет – улучшение по менее важному критерию может быть достигнуто только в том случае, если более важные при этом не ухудшаются.

Например, множество X можно интерпретировать как область допустимых по технологическим ограничениям вариантов удовлетворения потребности категорий потребителей с индексами $k = 1, \ldots, K$. Потребители проранжированы в порядке их важности. Удовлетворение потребности $k-1-$й категории имеет большее значение, чем $k-$й. Функции $c_k^T x$ характеризуют степень неудовлетворения потребности $k-$й категории потребителей.

Если буквально следовать принятому описанию задач последовательного линейного программирования, как это обычно делается, переход к следующему этапу решения задачи сопровождается расширением количества учитываемых ограничений при том же наборе переменных. Если же известно, что на каждом этапе используемый алгоритм вырабатывает относительно внутреннюю точку множества решений задачи данного этапа, то не требуется расширения состава ограничений при переходе к задаче следующего этапа. При этом происходит сокращение состава переменных в задачах следующего этапа.

Так, после рассмотрения первого, самого важного, критерия имеем следующее множество решений:

$$\overline{X}_1 = Arg\min\left\{c_1^T x:\ x \in X\right\}.$$

Если известно, что полученное оптимальное решение задачи некоторого этапа $\overline{x}$ находится во множестве $ri\overline{X}_1$, то имеем следующее описание множества оптимальных решений данной задачи и допустимых решений последующей задачи

$$\overline{X}_1 = \{x \in R^n:\ Ax = b,\ x_j \ge 0,\ j \in J(\overline{x})\ \ и\ \ \overline{x}_j = 0,\ j \in J_0(\overline{x})\}$$

Отсюда очевидно, что нулевые компоненты данного вектора $\overline{x}$ останутся таковыми для решений всех последующих задач многокритериальной оптимизации. Следовательно, эти переменные при решении задачи минимизации по следующему критерию можно просто исключить из рассмотрения. Это способствует сильному упрощению задачи. Аналогичную процедуру можно проделывать на последующих этапах, используя информацию о том, что полученное решение принадлежит множеству относительно внутренних точек допустимой области задачи линейного программирования этих этапов.

5.3. Ограниченность и неограниченность переменных взаимно двойственных задач линейного программирования

На основе теорем об альтернативных системах линейных неравенств можно доказать ряд других полезных и интересных фактов о соотношении взаимно двойственных задач линейного программирования. В частности, можно прояснить вопрос, какие переменные прямой и двойственной задач ограничены и не ограничены на множествах допустимых решений прямой и двойственной задач.

Рассмотрим взаимно ортогональные линейные подпространства, порождаемые матрицей A, используемой в описании задач (1), (2)

$$S = \{x \in R^n : Ax = 0\},$$

$$S^{\perp} = \{x = A^T u : u \in R^m\}.$$

Пусть $J(S_+)$ и $J(S_+^{\perp})$ – введенные при доказательстве теоремы 3.5 множества индексов такие, что

$$z_j > 0,\ y_j = 0 \text{ при } j \in J(S_+),$$

$$z_j = 0,\ y_j > 0 \text{ при } j \in J(S_+^{\perp})$$

для любых $z \in riS_+$, $y \in riS_+^{\perp}$. Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть* $X \neq \varnothing$, $U \neq \varnothing$. *Тогда при всех* $x \in X$ *и при всех* $u \in U$*:*

– компонента x_j *ограничена сверху, компонента* $g_j(u)$ *не ограничена сверху для любого* $j \in J(S_+^{\perp})$*;*

– компонента x_j *не ограничена сверху, компонента* $g_j(u)$ *ограничена сверху для любого* $j \in J(S_+)$.

Согласно приведенной теореме, множество *X* не ограничено в том и только том случае, если не пусто множество $J(S_+)$. Множество *U* может быть неограниченным в двух не взаимоисключающих случаях: во-первых, если не пусто множество $J(S_+^{\perp})$, во-вторых, если строки матрицы *A* линейно зависимы.

Также на базе теорем об альтернативных линейных неравенствах применительно к линейным подпространствам

$$\overline{S} = \{s \in R^n :\ As = 0,\ c^{\mathrm{T}} s = 0\}$$

и

$$Q = \{q \in R^n :\ \exists\, v \in R^m, q = A^{\mathrm{T}} v, b^{\mathrm{T}} v = 0\}$$

вытекает приводимое ниже утверждение относительно неограниченных компонент векторов *x* и *g(u)* на множествах оптимальных решений задач (1), (2).

Теорема 3. *Пусть задачи (1), (2) имеют допустимые и, следовательно, оптимальные решения. Тогда:*

– если при $x \in \overline{X}$ *компонента* x_j *может неограниченно возрастать, то* $g_j(u) = 0$ *при любом* $u \in U$*;*

– если при $u \in \overline{U}$ *компонента* $g_j(u)$ *может неограниченно возрастать, то* $x_j = 0$ *для любого* $x \in X$.

Предположим, имеем решение $x \in riX$. Если $x_j = 0$, то при любом допустимом решении задачи (1) эта компонента будет нулевой. Поэтому ее можно исключить из рассмотрения. Если $x_j > 0$ для всех $j = 1,...,n$ при данном $x \in X$, то согласно приведенной теореме вектор $g(u)$ будет ограниченным при всех $u \in \overline{U}$.

Пусть имеем решение $u \in riU$. Если $g_j(u) = 0$, то при любом другом допустимом решении задачи (2) эта компонента вектор-функции $g(u)$ будет нулевой и ее можно исключить из рассмотрения. Если $g_j(u) > 0$ для всех $j = 1,...,n$ при некотором $u \in U$, то согласно теореме 1 множество оптимальных решений $\overline{X}$ задачи (1) будет ограниченным.

5.4. Условия оптимальности для задачи минимизации выпуклой дифференцируемой функции при линейных ограничениях

Теоремы об альтернативных системах линейных неравенств могут служить основой вывода теории двойственности для более широкого класса задач оптимизации. Непосредственным обобщением линейного программирования являются задачи выпуклого программирования. Здесь ограничимся рассмотрением задачи выпуклого программирования с линейными ограничениями и дифференцируемой целевой функцией.

Пусть заданы: выпуклая дифференцируемая функция $f(x)$ от вектора $x \in R^n$, матрица A размера $m \times n$ и вектор $b \in R^n$. Рассматривается задача поиска вектора x из условий

$$f(x) \to \min, \tag{22}$$

$$Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{23}$$

Теорема 4. *Для того чтобы вектор* $\overline{x} \in R^n$ *был оптимальным решением задачи (22), (23), необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

1) *этот вектор должен быть допустимым решением задачи, т.е. должен удовлетворять условию (23);*

2) *при некотором* $\overline{u} \in R^m$ *должны выполняться неравенства*

$$g_j(\overline{x}, \overline{u}) = 0, \quad j \in J(\overline{x}), \tag{24}$$

$$g_j(\overline{x}, \overline{u}) \geq 0, \quad j \in J_0(\overline{x}), \tag{25}$$

где

$$g(x, u) = \nabla f(x) - A^{\mathrm{T}} u, \tag{26}$$

$$J(\overline{x}) = \{j : \overline{x}_j > 0\},$$

$$J_0(\overline{x}) = \{j : \overline{x}_j = 0\}.$$

При этом для векторов $\overline{x}$, $\overline{u}$ *выполняется равенство*

$$\langle \nabla f(\overline{x}), \overline{x} \rangle = b^{\mathrm{T}} \overline{u}. \tag{27}$$

Доказательство. Для того чтобы вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям (23), был оптимальным решением, необходимо и достаточно, чтобы не существовало направления, не выводящего из области допустимых решений задачи (22), (23), при котором целевая функция убывала, т.е. необходимо и достаточно, чтобы не существовало $s \in R^n$ такого, что

$$As = 0, \tag{28}$$

$$s_j \geq 0, \quad j \in J_0(\overline{x}), \tag{29}$$

$$\langle \nabla f(\overline{x}), s \rangle < 0. \tag{30}$$

Неравенство (30) можно заменить на условия

$$\left\langle \nabla f(x), s \right\rangle + s_{n+1} = 0, \quad s_{n+1} > 0,$$

где s_{n+1} – дополнительная переменная.

Согласно теореме Гейла 3.16, система уравнений и неравенств (28)–(30) не имеет решения в том и только том случае, если имеет решения система линейных уравнений и неравенств

$$(\nabla f(\overline{x}) - A^{\mathrm{T}} u)_j = 0, \quad j \in J(\overline{x}),$$

$$(\nabla f(\overline{x}) - A^{\mathrm{T}} u)_j \geq 0, \quad j \in J_0(\overline{x})$$

относительно вектора переменных $u \in R^m$, т.е. если выполняются условия (24), (25). Из (26) следует, что $\left\langle \nabla f(\overline{x}), \overline{x} \right\rangle = \left\langle A^T \overline{u} - g(\overline{x}, \overline{u}), \overline{x} \right\rangle = \left\langle A^T \overline{u}, \overline{x} \right\rangle -$ $-\left\langle g(\overline{x}, \overline{u}), \overline{x} \right\rangle$. В силу условия дополняющей нежесткости (24), (25) $\left\langle g(\overline{x}, \overline{u}), \overline{x} \right\rangle = 0$. Поэтому $\left\langle \nabla f(\overline{x}), \overline{x} \right\rangle = \left\langle A^T \overline{u}, \overline{u} \right\rangle = \left\langle \overline{u}, A\overline{x} \right\rangle = \left\langle \overline{u}, b \right\rangle$. Этим установлена справедливость равенства (27).
Теорема 4 доказана.

Задачи к главе 5

1. Сформулировать задачи линейного программирования, двойственные к данным и указать для них множества рецессивных направлений:
   1) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$
      $x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 1,$
      $x_1 - x_2 = 2,$
      $x_1 \geq 0.$

   2) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \to \min$
      $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 0,$
      $x_1 + x_4 + x_5 \leq 0,$
      $x_1 - x_5 = 1,$
      $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_5 \leq 0.$

2. Найти оптимальное решение задач линейного программирования, относительно внутренние точки оптимальных решений и определить с их помощью единственность или неединствееность оптимальных решений этих задач. Установить, какие переменные прямой и двойственной задач ограничены и не ограничены на множествах допустимых решений соответствующих задач.

1) $4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2,$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3,$

$x_i \ge 0, i = 1, \dots, 4.$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$x_1 - x_2 \ge 0,$

$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \ge 1,$

$x_i \ge 0, i = 1, \dots, 5.$

3) $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \to \min,$

$-3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1,$

$-4x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = -1,$

$x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, 5.$

4) $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 \to \max$

$x_1 - 3x_2 + \quad + 2x_5 = 8,$

$4x_2 - 3x_4 - x_5 = 3,$

$x_i \ge 0, i = 1, \dots, 5.$

Глава 6. Неравенства-следствия

6.1. Критерии для выявления избыточных линейных неравенств

У систем линейных неравенств могут быть отдельные неравенства, исключение которых из системы не влияет на множество решений. Во многих случаях полезно уметь выявлять такие неравенства с тем, чтобы путем их исключения упрощать рассматриваемую систему. На базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств можно строить конструктивные критерии для выявления избыточных неравенств. Ниже приводятся два критерия: сначала для однородной системы неравенств, затем для общего случая.

Здесь теоремы об избыточных неравенствах будут доказаны как следствия из теорем об альтернативных системах линейных неравенств главы 3. Следует отметить, что теоремы о линейных неравенствах-следствиях равносильны теоремам об альтернативных системах линейных неравенств. Можно было, как это сделано в [18], дать независимое доказательство утверждений о неравенствах-следствиях и затем из них получить теоремы об альтернативных системах линейных неравенств.

Ниже утверждение о неравенствах-следствиях, следуя С. Н. Черникову и И. И. Еремину [9, 18], названо теоремой Минковского–Фаркаша. Этим подчеркивается, что фундаментальный результат в теории линейных неравенств был опубликован ранее И. Фаркаша в работах 1886 г. известного математика Г. Минковского.

Считаем заданными матрицу A размера $m \times n$, векторы $b \in R^m$, $c \in R^n$ и вещественную константу d.

Определение. *Линейное неравенство*

$$c^{\mathrm{T}} x \geq d \tag{1}$$

назовем следствием системы линейных неравенств

$$Ax \geq b, \tag{2}$$

если любой вектор $x \in R^n$*, удовлетворяющий системе (2), удовлетворяет условию (1).*

Геометрически это означает, что полиэдр X, задаваемый системой неравенств (2), располагается в положительном полупространстве, образуемом гиперплоскостью $H = \{x \in R^n : c^{\mathrm{T}} x = d\}$ (рис. 8).

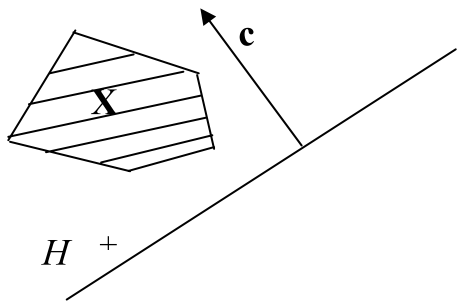

Рис. 8. Полиэдр X, состоящий из множества решений системы неравенств (2) и лежащий в положительном полупространстве (обозначим это полупространство H^+), задаваемом неравенством-следствием (1).

Сначала рассмотрим наиболее простой для доказательства случай, который хорошо иллюстрирует технику построения и обоснования критериев для идентификации избыточных неравенств.

Теорема 1 (случай однородных неравенств). *Для того чтобы неравенство*

$$c^{\mathrm{T}}x > 0 \tag{3}$$

являлось следствием системы

$$Ax \geq 0, \tag{4}$$

необходимо и достаточно существование вектора $u \in R^m$ такого, что

$$A^{\mathrm{T}}u = c, \quad u \geq 0\,. \tag{5}$$

Доказательство. Неравенство (3) не является следствием системы (4) в том и только том случае, если имеет решения следующая система линейных неравенств:

$$Ax \geq 0, \quad -c^{\mathrm{T}}x > 0\,.$$

По теореме Фаркаша 3.15, в которой поменяли местами матрицы A и A^T, а вектор x заменили на вектор u, данная система не имеет решения в том и только том случае, если имеет решение система (5).

Теорема 1 доказана.

Задание 1. *Доказать, что из теоремы 1 следует теорема Фаркаша 3.15.*

Теорема 2 (Минковского – Фаркаша, общий случай). *Пусть система (2) совместна. Неравенство (1) будет следствием системы (2), если при некотором $u \in R^m$*

$$A^{\mathrm{T}}u = c, \quad b^{\mathrm{T}}u \geq d, \quad u \geq 0\,. \tag{6}$$

Доказательство. Если и только если неравенство (1) не является следствием системы (2), то при некотором $x \in R^n$

$$Ax \geq b, \ \langle c, x \rangle < d\,. \tag{7}$$

А это возможно в том и только том случае, если разрешима следующая система строго однородных линейных неравенств с $(n+1)$-й переменной:

$$Ax - bx_{n+1} \geq 0, \tag{8}$$

$$-c^{\mathrm{T}}x + dx_{n+1} > 0, \quad x_{n+1} > 0, \tag{9}$$

где x – вектор R^n, x_{n+1} – дополнительная переменная. Отметим, что в (9) оба неравенства заданы в строгой форме.

Для того чтобы система (8), (9) имела решение, необходимо и достаточно иметь решения для двух систем линейных неравенств, являющихся ослаблением системы (8), (9) путем замены одного из строгих неравенств в (9) на нестрогое. Итак, первая система включает в себя условие (8) и неравенства

$$-c^{\mathrm{T}}x + dx_{n+1} > 0, \quad x_{n+1} \geq 0. \tag{10}$$

Вторая система включает условие (8) и неравенства

$$-c^{\mathrm{T}}x + dx_{n+1} \geq 0, \quad x_{n+1} > 0. \tag{11}$$

Решение системы (8), (9) будет решением обеих систем (8), (10) и (8), (11). Наоборот, имея решение систем (8), (10) и (8), (11), суммируя их покомпонентно, получим решение системы (8), (9).

Альтернативной к (8), (10) по теореме Фаркаша 3.15 будет следующая система линейных неравенств относительно вектора переменных $u \in R^m$ и двух дополнительных переменных u_{m+1} и u_{m+2}:

$$A^T u - cu_{m+1} = 0, \quad -b^T u + du_{m+1} + u_{m+2} = 0, \tag{12}$$

$$u \geq 0, \quad u_{m+1} > 0, \quad u_{m+2} \geq 0. \tag{13}$$

Альтернативной к (8), (11) по той же теореме 3.15 будет система с таким же составом переменных, включающая условия (12) и неравенства

$$u \geq 0, \quad u_{m+1} \geq 0, \quad u_{m+2} > 0. \tag{14}$$

Итак, неравенство (1) будет следствием системы (2), если и только если разрешима система неравенств (12), (13) или (12), (14). Подчеркнем, что для утверждения о наличии следствия достаточно разрешимости любой из этих систем. Чтобы утверждать об отсутствии следствия, необходимо, чтобы обе системы не имели решения.

Система (12), (13) имеет решение в том и только том случае, если имеет решение система (6).

Действительно, если вектор $u \in R^m$ является решением системы (6), то этот вектор вместе с величинами $u_{m+1} = 1, u_{m+2} = b^T u - d$ образует решение системы (12), (13). Наоборот, если вектор $u \geq 0$ и величины $u_{m+1} > 0$,

$u_{m+2} \geq 0$ удовлетворяют условиям (12), то вектор $\tilde{u} = (1/u_{m+1})u$ будет решением системы (6).

Что дополнительного дает к системе (12), (13) система неравенств (12), (14)? Если система (12), (14) имеет решение, то возможны два случая. Если для ее решения $u_{m+1} > 0$, то это будет решение рассмотренной выше системы (12), (13), т. е. этот случай не вносит ничего нового.

Если $u_{m+1} = 0$ для решения системы (12), (14), то эта система приобретает вид

$$A^{\mathrm{T}}u = 0, \quad b^{\mathrm{T}}u > 0. \tag{15}$$

Наличие решения у такой системы означает, что исходная система (2) была несовместной, что противоречит условию теоремы.

Поскольку совместность системы (2) постулировалась в условиях теоремы 2, то можно считать, что система неравенств (12), (14) не дает ничего дополнительного. Достаточно системы неравенств (12), (13), наличие решения у которой, как было доказано, равносильно наличию решения у системы (6).

Теорема 2 доказана.

Замечание. В случае, когда система несовместна (множество решений пусто), то любое неравенство можно считать следствием этой системы. Поэтому, если не включать в формулировки теоремы условие совместности системы (2), то в качестве критерия для доказательства следствия из системы (2) неравенства (1) формально достаточно указать решение либо системы (6), либо системы (15).

Алгоритмически вопрос об избыточности условия (1) по отношению к системе (2), очевидно, следует решать в два этапа. Сначала необходимо определить, совместна ли система (2). Чтобы установить совместность достаточно указать одно из решений данной системы. Чтобы установить несовместность, достаточно указать одно из решений системы (15).

Если система (2) совместна, то для того, чтобы убедиться в избыточности условия (1), достаточно найти решение системы (6). Чтобы убедиться в неизбыточности условия (1), т.е. в том, что оно не является следствием системы (2), достаточно найти решение системы (8), (10).

Наглядную иллюстрацию использования теоремы 2 дает следующий пример.

Пример 1. Докажем с помощью теоремы 2 (Минковского–Фаркаша), что неравенство

$$-5x_1 - 8x_2 - 11x_3 - 14x_4 \geq -9$$

является следствием следующей совместной системы неравенств:

$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -3$$

$$-2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \geq -2.$$

Согласно утверждению теоремы, этот факт имеет место, если непротиворечива следующая система:

$$-u_1 - 2u_2 = -5,$$
$$-2u_1 - 3u_2 = -8,$$
$$-3u_1 - 4u_2 = -11,$$
$$-4u_1 - 5u_2 = -14,$$
$$-3u_1 - 2u_2 \ge -9,$$
$$u_1 \ge 0, u_2 \ge 0.$$

Вектор $u^T = (1,2)$ удовлетворяет данной системе, следовательно, избыточность неравенства $-5x_1 - 8x_2 - 11x_3 - 14x_4 \ge -9$ по отношению к исходной системе доказана.

Можно воспользоваться и другими способами идентификации ситуации избыточности условия (1) по отношению к системе (2) – на основе поиска решения системы (7). Если будет найдено решение системы (7), то неравенство (1) не является следствием системы (2). Если в процессе поиска решения системы (7) будет установлено, что она не имеет решения, т. е. ее условия противоречивы, то тем самым будет доказано, что неравенство (1) является следствием системы неравенств (2).

Проблему поиска решения системы (7) можно представить в виде задачи линейного программирования относительно вектора переменных $x \in R^n$

$$\langle c, x \rangle \to \min, \tag{16}$$

при условии

$$Ax \ge b. \tag{17}$$

Не обязательно искать точное решение приведенной задачи линейного программирования. Если в процессе ее решения будет получен вектор x, удовлетворяющий условию (17), при котором значение целевой функции (16) меньше d, то тем самым будет найдено решение системы (7). Этим будет доказано, что неравенство (1) не является следствием системы (2). Данная ситуация возможна в двух случаях. Во-первых, если задача (16), (17) имеет оптимальное решение и значение целевой функции в точке оптимума меньше d. Во-вторых, если задача (16), (17) не имеет решения из-за того, что у нее целевая функция не ограничена снизу на области допустимых по условию (17) векторов.

В оставшихся двух случаях неравенство (1) является следствием системы (2). Во-первых, это имеет место тривиальным образом (поскольку пустое множество принадлежит любому множеству) в том случае, если в процессе решения любым из методов задачи линейного программирования (16), (17) выяснится, что ее ограничения (17) несовместны. Во-вторых, – если для задачи (16), (17) будет найдено оптимальное решение и оптимальное значение целевой функции окажется большим или равным d.

6.2. Критерий для выявления избыточных ограничений для разных видов систем линейных неравенств

На основе результатов предыдущего раздела можно предложить общую схему построения критериев для идентификации неравенств-следствий. Пусть P – множество R^n решений некоторой системы линейных неравенств, Q – множество R^n решений некоторого неравенства. Это неравенство **будет следствием исходной системы**, если $x \in Q$ для любого $x \in P$, т. е. если $P \subseteq Q$.

Формулируем **обратное утверждение**. Рассматриваемое дополнительное неравенство не будет следствием исходной системы, если существует $x \in R^n$ такой что

$$x \in P,\ x \notin Q. \tag{18}$$

Эти условия можно представить в виде некоторой системы линейных неравенств относительно вектора x. Эту систему назовем **обратной системой неравенств**.

На основе изложенных в главе 3 правил можно сформулировать **альтернативную систему неравенств** относительно полученной обратной системы. Итак, рассмотрим задачу: найти вектор

$$u \in D,$$

где D – множество решений альтернативной к (18) системе. Если и только если $D \neq \varnothing$, то $x \in Q$ для любого $x \in P$.

Рассмотрим три примера. Заданными в них будут матрица A размера $m \times n$, вектор $b \in R^m$, $c \in R^n$ и вещественная константа d. Переменные исходной системы составляют вектор $x \in R^n$.

Пример 2. Определим, в каких случаях неравенство

$$c^T x \geq d \tag{19}$$

является следствием системы уравнений

$$Ax = b. \tag{20}$$

Считаем, что система уравнений (20) совместная.

Строим обратную систему неравенств:

$$Ax = b,$$

$$c^T x < d.$$

Если данная система имеет решение, то неравенство (19) не является следствием совместной системы (20). Для обратной системы строим альтернативную систему неравенств с вектором переменных $u \in R^m$

$$A^T u = c, \tag{21}$$

$$b^T u \geq d. \tag{22}$$

Получаем следующее утверждение: неравенство (19) является следствием совместной системы (20) в том и только том случае, если имеет решение система (21), (22).

Пример 3. Определим, при каких условиях уравнение

$$c^T x = d \tag{23}$$

будет следствием системы линейных уравнений

$$Ax = b. \tag{24}$$

Считаем, что система (24) совместна.

Обратная система в данном случае имеет вид

$$Ax = b,$$

$$c^T x \neq d.$$

Альтернативная система состоит в определении вектора $u \in R^m$ такого, что

$$A^T u = c, \;\; b^T u = d.$$

Мы получили хорошо известное из линейной алгебры утверждение: линейное уравнение (23) будет следствием системы линейных уравнений (24) в том и только том случае, если вектор c является линейной комбинацией с некоторыми весами строк матрицы A, а величина d выражается в виде такой же линейной комбинации (с теми же весами) коэффициентов вектора b.

Пример 4. В каком случае неравенство

$$c^T x \geq d \tag{25}$$

является следствием системы линейных уравнений и неравенств

$$Ax = b, \;\; x \geq 0. \tag{26}$$

Считаем, что эта система совместная.

Обратной к (25), (26) будет следующая система линейных неравенств

$$Ax = b, \;\; x \geq 0, \tag{27}$$

$$c^T x < d. \tag{28}$$

Если система (27), (28) имеет решение, то неравенство (25) не будет следствием системы линейных уравнений и неравенств (26).

Альтернативная к обратной система с вектором переменных $u \in R^m$ имеет вид:

$$A^T u \leq c, \tag{29}$$

$$b^T u \geq d. \tag{30}$$

Получаем, что неравенство (25) является следствием совместной системы (26) в том и только том случае, если имеет решение система неравенств (29), (30).

В данном случае также вопрос об избыточности условия (25) относительно условия (26) можно выяснить путем решения задачи линейного программирования. Задача имеет вид:

$$c^T x \to \min, \tag{31}$$

при ограничениях

$$Ax = b,\ x \geq 0. \qquad (32)$$

Если в процессе решения этой задачи будет найдено допустимое по условиям (32) решение, при котором

$$c^T x < d,$$

либо выяснится, что целевая функция не ограничена снизу на области допустимых по условиям (32) решений, то неравенство (25) следует считать следствием ограничений (26).

6.3. Алгоритм решения задачи линейного программирования, сочетающий ввод в область допустимых решений с оптимизацией

Излагаемый ниже алгоритм является развитием алгоритма решения систем линейных неравенств из раздела 4. Предлагаемый алгоритм предназначен для поиска оптимального решения задачи линейного программирования. При этом одновременно происходит ввод в область допустимых решений задачи линейного программирования – во множество решений системы линейных неравенств, составляющей ограничения задачи. В частности, излагаемый алгоритм может служить для идентификации линейных неравенств-следствий, поскольку эта проблема, как было показано в предыдущем разделе, сводится к решению задачи линейного программирования.

Рассматриваются двойственные задачи линейного программирования

$$c^{\mathrm{T}} x \to \min,\ x \in X, \qquad (33)$$

$$b^{\mathrm{T}} u \to \max,\ u \in U, \qquad (34)$$

где

$$X = \{x \in R^n:\ Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad (35)$$

$$U = \{u \in R^m : c - A^{\mathrm{T}} u \geq 0\} \qquad (36)$$

множества допустимых решений задач (33), (34). Заданы векторы $c \in R^n$, $b \in R^m$, A – матрица $m \times n$, $\operatorname{rank} A = m$. Множества оптимальных решений задач (33), (34) обозначим

$$\overline{X} = Arg \min\{c^{\mathrm{T}} x:\ x \in X\},$$

$$\overline{U} = Arg \max\{b^{\mathrm{T}} u : u \in U\}.$$

Алгоритм. Задан вектор $x^0 \in R^n$ с положительными компонентами $x_j^0 > 0,\ j = 1, \dots, n$. Итеративное улучшение решения задачи (33) осуществляется по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k,\ k = 0, 1, 2, ... \qquad (37)$$

Вектор направления корректировки решения s^k определяется как результат решения вспомогательной задачи

$$c^T s + \frac{1}{2} s^T D_k^{-1} s \to \min, \; s \in R^n, \; As = r^k, \tag{38}$$

где

$$r^k = b - Ax^k,$$

$$D_k = diag\, d^k,$$

$$d_j^k = (x_j^k)^2, \; j = 1, \dots, n.$$

Вектор r^k состоит из невязок ограничений-равенств задачи (33) на k-й итерации. Диагональная матрица D_k составлена из положительных весовых коэффициентов d_j^k.

Применяя к вспомогательной задаче (38) метод множителей Лагранжа, получаем расчетные формулы

$$u^k = (AD_k A^T)^{-1}(r^k + D_k Ac), \tag{39}$$

$$g^k = g(u^k), \tag{40}$$

$$s^k = -D_k g^k. \tag{41}$$

Здесь выражение (39) означает, что вектор u^k является решением системы линейных уравнений относительно вектора переменных $u \in R^n$ с симметричной неотрицательно определенной матрицей

$$(AD_k A^T)u = r^k + D_k Ac. \tag{42}$$

Вектор u^k служит в качестве приближения к решению задачи (34).

Шаг λ_k вычисляется по правилам:

$$\lambda_k = \min\left\{1, \bar{\lambda}_k\right\}, \text{ если } r^k \neq 0, \tag{43}$$

$$\lambda_k = \bar{\lambda}_k, \text{ если } r^k = 0, \tag{44}$$

где

$$\bar{\lambda}_k = \gamma \cdot \tilde{\lambda}_k, \tag{45}$$

$$\tilde{\lambda}_k = \min\left\{-x^k / s_j^k : s_j^k < 0\right\}, \tag{46}$$

γ – параметр из интервала (0, 2/3).

Если $r^k \neq 0$ и $s^k \geq 0$, то полагаем $\lambda_k = 1$.

Особые ситуации. Вспомогательная задача (38) не имеет решения в том и только том случае, если несовместна система линейных уравнений $Ax = b$. Это выявляется сразу на исходной итерации при $k = 0$ как несовместность системы уравнений (42). Далее считаем, что вспомогательная задача имеет решение, система $Ax = b$ совместна.

Шаг корректировки решения не может быть вычислен по правилам (43)–(46) только в двух случаях.

Первый случай: $s^k = 0$. Это возможно только при $r^k = 0$, т.е. когда полученное решение x^k является допустимым, т.е. $x^k \in X$. Данный случай означает, что $\overline{X} = X$, вектор x^k является относительно внутренней точкой допустимых и одновременно оптимальных решений задачи (33).

Второй случай: если $s^k \geq 0$ при $r^k = 0$ и $s^k \neq 0$, то шаг корректировки решения не может быть найден из-за того, что целевая функция задачи (33) не ограничена снизу на X. В обоих случаях расчеты должны быть закончены.

Свойства процесса. Правило вычисления шага (43)–(46) гарантирует, что на всех итерациях $x^k > 0$, так как $x^0 > 0$ и

$$x^{k+1} \geq (1-\gamma)x^k. \tag{47}$$

На всех итерациях вектор невязок ограничений-равенств меняется по правилу

$$r^{k+1} = (1-\lambda_k)r^k. \tag{48}$$

Действительно,

$$b - A(x^k + \lambda_k s^k) = (b - Ax^k) - \lambda_k A s^k = (1-\lambda_k)r^k.$$

Это соотношение объясняет, почему при $r^k \neq 0$ шаг ограничивается сверху единицей. До тех пор пока $r^k \neq 0$, рассматриваемый процесс осуществляет ввод в область допустимых решений задачи (33). При этом, согласно (48), происходит монотонное уменьшение по итерациям абсолютных значений невязок ограничений-равенств.

Если $r^k = 0$, то на данной и на всех последующих итерациях, согласно (48), $x^k \in X$. Если $\overline{X} = X$, то $s^k = 0$. Тем самым ситуация $\overline{x} = x$ будет выявлена сразу же, как будет получено допустимое решение $x^k \in X$.

При $\overline{X} \neq X$ будет происходить монотонное уменьшение по итерациям значений целевой функции задачи (33). Рассматриваемый процесс осуществляет оптимизацию в области допустимых решений задачи (33).

Действительно, из условия оптимальности Лагранжа вспомогательной задачи (38) вытекает

$$(r^k)^T u^k = c^T s^k + (s^k)^T D_k s^k.$$

При $r^k = 0$ и $s^k \neq 0$ это равенство означает, что

$$c^T s^k < 0.$$

Следовательно,

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k.$$

Это же объясняет последнюю из приведенных выше особых ситуаций: при $s^k \geq 0$, $s^k \neq 0$ и $r^k = 0$ в направлении вектора s^k можно неограниченно уменьшать значение целевой функции задачи (33), не выходя из области допустимых решений X.

Замечание. Если $c = 0$, то изложенный здесь алгоритм совпадает с алгоритмом из раздела 4.3.

Теоретическое обоснование изложенного здесь алгоритма дано в работе [12], где доказаны приводимые ниже теоремы. Выделим три возможные ситуации.

Система ограничений (35) задачи (33) несовместна. В этом случае имеет место сходимость векторов

$$\tilde{u}^k = \frac{\beta_k}{F_k} u^k$$

при $k \to \infty$ к вектору, принадлежащему множеству

$$U = \{u \in R^n : \; A^T u \le 0, \; b^T u = 1\} .$$

Здесь

$$\beta_k = \left\| r^k \right\| / \left\| r^0 \right\|,$$

$$F_k = \sum_{j=1}^{n} (s_j^k) / d_j^k .$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 3. *Если $X = \varnothing$ и система уравнений $Ax = b$ совместна, то существует $\bar{u} \in U$ такой, что*

$$\lim \tilde{u}^k = \bar{u} .$$

При этом для некоторого $\bar{\beta} \in [0,1)$

$$\lim \beta^k = \bar{\beta},$$

$$\lim \frac{\beta^{k+1} - \bar{\beta}}{\beta^k - \bar{\beta}} = (1 - \gamma).$$

Отметим, что условие $U \ne \varnothing$ означает, что $X = \varnothing$. При расчетах в качестве критерия для выявления ситуации $X = \varnothing$ можно использовать условие

$$\left\| (A^T \tilde{u}^k)_- \right\|^2 + \left| b^T u^k - 1 \right| \le \varepsilon ,$$

где ε – положительная, достаточно малая величина. Это условие означает, что вектор $\tilde{u}^k$ близок к множеству U. Степень близости выражается величиной ε.

Условия задачи (33) совместны и среди допустимых решений этой задачи есть решения со всеми положительными компонентами. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Если задача (33) имеет допустимое решение со всеми положительными компонентами, т.е. существует $x \in X$ такой, что $x > 0$, то через конечное число итераций $k \ge 0$ будет получено решение $x^k \in riX$ со всеми положительными компонентами. На последующих итерациях возможны три случая:*

1. Если все допустимые решения являются оптимальными $\overline{X} = X$*, то* $g(u^k) = 0$*. Вычисления завершаются с констатацией фактов* $x^k \in ri\overline{X},\ u^k \in ri\overline{U}$*.*

2. Если задача (33) не имеет оптимальных решений, $\overline{X} = \varnothing$*, то либо на одной из итераций будет получено направление корректировки решения* $s^k \geq 0,\ s^k \neq 0$*, по которому можно неограниченно уменьшать значение целевой функции, не выходя из области допустимых решений* X*, либо значение целевой функции* $c^T x^k$ *будет неограниченно убывать по итерациям*

$$\lim_{k\to\infty} c^T x^k \to -\infty.$$

3. Если $\overline{X} \neq \varnothing, \overline{X} \neq X$*, то существует* $\overline{x} \in ri\overline{X},\ \overline{u} \in ri\overline{U}$ *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \overline{x},$$

$$\lim_{k\to\infty} u^k = u.$$

При этом

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\|x^{k+1} - \overline{x}\right\|}{\left\|x^k - \overline{x}\right\|} = (1-\gamma),$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\|u^{k+1} - \overline{u}\right\|}{\left\|u^k - \overline{u}\right\|} = (1-\gamma),$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c^T(x^{k+1} - \overline{x})}{c^T(x^k - \overline{x})} = (1-\gamma).$$

Условия задачи (33) совместные и среди допустимых решений этой задачи нет решений со всеми положительными компонентами. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть задача (33) имеет допустимые решения. При этом у вектора* $x \in riX$ *имеются нулевые компоненты* $J_0(x) \neq \varnothing$*. Тогда на всех итерациях* $r^k \neq 0$*. При этом*

$$\lim_{k\to\infty} r^k = 0$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\|r^{k+1}\right\|}{\left\|r^k\right\|} = (1-\gamma).$$

Возможны два случая.

1. Задача (33) не имеет оптимальных решений $\overline{X} = \varnothing$*. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} c^T x^k \to -\infty.$$

2. Задача (33) имеет оптимальные решения. Тогда существуют $x \in \overline{X}, u \in \overline{U}$ *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \bar{x},$$
$$\lim_{k\to\infty} u^k = \bar{u}.$$

При этом

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| x^{k+1} - \bar{x} \right\|}{\left\| x^k - \bar{x} \right\|} = (1-\gamma),$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left\| u^{k+1} - \bar{u} \right\|}{\left\| u^k - \bar{u} \right\|} = (1-\gamma).$$

Пример 5. Найдем решение задачи линейного программирования

$$x_1 + 7x_2 \to \min$$
$$23x_1 + 11x_2 = 2645,$$
$$-20x_1 + 10x_2 = -950,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

алгоритмом внутренних точек. Здесь матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ -20 & 10 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2645 \\ -950 \end{bmatrix}.$$

В качестве стартовой точки выберем вектор с положительными компонентами $x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1$.

Вычислим вектор невязок

$$r^0 = \begin{bmatrix} 2645 \\ -950 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2611 \\ -940 \end{bmatrix}.$$

Вектор направления корректировки решения s^0 определим, согласно (38), как результат решения задачи

$$s_1 + 7s_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{s_1^2}{1} + \frac{s_2^2}{1}\right) \to \min,$$
$$23s_1 + 11s_2 = 2611,$$
$$-20s_1 + 10s_2 = -940.$$

С помощью расчетных формул (39)–(41) находим

$$u^0 = \begin{bmatrix} 5.16 \\ 1.83 \end{bmatrix},$$
$$g^0 = g(u^0) = \begin{bmatrix} -81 \\ -68 \end{bmatrix},$$
$$s^0 = \begin{bmatrix} 81 \\ 68 \end{bmatrix}.$$

У вектора s^0 нет нулевых компонент, поэтому, согласно (43)–(46) шаг $\lambda_0 = 1$.

Осуществляем итерацию улучшения решения $x^1 = x^0 + \lambda_0 x^0$.

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 81 \\ 68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 82 \\ 69 \end{bmatrix}.$$

Вычислим вектор невязок

$$r^1 = \begin{bmatrix} 2645 \\ -950 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 23 & 11 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 82 \\ 69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, вектор x^1 является допустимым решением, т. е. удовлетворяющим всем ограничениям задачи.

На следующей итерации осуществляем оптимизацию в области допустимых решений. Находим значения векторов

$$u^1 = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.33 \end{bmatrix}, g^1 = g(u^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, вектор $x^T = (82,\ 69)$ является относительно внутренней точкой допустимых и одновременно оптимальных решений задачи.

Упражнения и задачи к главе 6

1. Используя теорему 2 (Минковского–Фаркаша), определить, является ли неравенство
   $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \geq 3$

следствием системы неравенств

$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 1,$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 1.$

2. Используя геометрические построения, найти все значения параметра k, при которых неравенство
   $x_1 + 5x_2 \leq k$

является следствием системы неравенств

$x_1 + x_2 \leq 12,$

$0 \leq x_1 \leq 10,$

$0 \leq x_2 \leq 8.$

3. Определить, является ли неравенство
   $-4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 1$

следствием системы линейных неравенств

$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3$

$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 4.$

4. Используя алгоритм решения задач линейного программирования из раздела 6.3, решить задачи линейного программирования

   1) $5x_1 + 3x_2 \to \max$

   $3x_1 + 5x_2 \le 15,$

   $5x_1 + 2x_2 \le 10.$

   2) $2x_1 + 3x_2 \to \max$

   $3x_1 + 3x_2 \le 6,$

   $x_1 + x_2 \ge 1,$

   $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Глава 7. Задачи минимизации сумм квадратов невязок систем линейных неравенств

В данной главе рассмотрим одно из возможных направлений конструирования методов решения систем линейных неравенств. Здесь не будем в деталях описывать методы решения, а ограничимся сведением проблемы поиска решения к двум классическим задачам. Одна из них – задача безусловной минимизации кусочно-квадратичной выпуклой функции. Для решения такой задачи могут эффективно применяться многие известные алгоритмы, в т.ч. различные модификации метода наискорейшего спуска и метода Ньютона.

Другая задача – минимизация квадратичной выпуклой функции при ограничениях-неравенствах на отдельные переменные. Для решения этой задачи также существует много эффективных методов. Обе указанные задачи относятся к так называемым простым задачам выпуклой оптимизации.

Процесс решения указанных задач любым из известных методов осуществляется путем итеративного построения некоторой последовательности приближений. Каждое последующее приближение в каком-то смысле лучше, чем предыдущее. При этом на каждой итерации можно определять приближение к множителям Лагранжа ограничений рассматриваемой задачи.

Здесь будет рассмотрено два пути сведения проблемы поиска решения системы линейных неравенств к указанным простым задачам оптимизации, каждый из которых может быть реализован в двух вариантах.

Во-первых, можно решать задачу минимизации суммы квадратов невязок исходной системы линейных неравенств. Эта задача сводится к минимизации кусочно-квадратичной функции. На основе приближений к множителям Лагранжа данной задачи можно формировать приближение к решению альтернативной системы линейных неравенств. Если в процессе вычисления окажется, что полученное на очередной итерации приближение является точным решением альтернативной системы, то тем самым выявляется ситуация противоречивости условий исходной системы линейных неравенств.

Данный подход может быть представлен в виде задачи поиска решения с минимальной нормой некоторой двойственной задачи, представимой в виде минимизации сепарабельной выпуклой функции при однородных линейных ограничениях. Приближениями к множителям Лагранжа этой задачи будут векторы, составляющие приближение к решению исходной системы неравенств. При решении данной задачи либо будет получено значение множителей Лагранжа, дающее решение исходной системы линейных неравенств, либо будут получены оптимальные значения переменных, составляющие решение альтернативной системы линейных неравенств с минимальной нормой. Получаемое решение альтернативной системы означает, что исходная система несовместна.

Во-вторых, можно решать задачу минимизации суммы квадратов невязок альтернативной системы. Если оптимальное значение такой задачи достигается при нулевых невязках, то исходная система не имеет решения. Если оптимальное решение достигается при ненулевых невязках, то альтернативная система не имеет решения. Тогда из множителей Лагранжа рассматриваемой задачи может быть получено решение исходной системы линейных неравенств. Причем это будет решение исходной системы с минимальной нормой.

Рассматриваемый вариант может быть представлен в виде некоторой двойственной задачи, состоящей в минимизации сепарабельной квадратичной выпуклой функции при однородных линейных ограничениях. Решением этой задачи в случае совместности исходной системы линейных неравенств будет решение исходной системы с минимальной нормой.

Сначала рассмотрим особенности этих двух подходов (в двух вариантах) для наиболее простого случая – для поиска решения или идентификации несовместности систем линейных уравнений.

7.1. Задачи минимизации суммы квадратов невязок исходной и альтернативной систем линейных уравнений

Рассматривается проблема поиска решения $x \in R^n$ системы линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

где заданными являются A – матрица размера $m \times n$, b – вектор R^m, $b \neq 0$.

По теореме 3.14 (Фредгольма), альтернативной (1) будет следующая система линейных уравнений относительно вектора переменных $u \in R^m$:

$$A^{\mathrm{T}}u = 0, \tag{2}$$

$$b^{\mathrm{T}}u = 1. \tag{3}$$

Минимизация сумм квадратов невязок исходной системы. Рассмотрим задачу безусловной оптимизации

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 \to \min,\ x \in R^n. \tag{4}$$

Данная задача всегда имеет решение (может быть, неединственное). Обозначим решение $\bar{x}$. Если вектор невязок для оптимального решения задачи (4)

$$\bar{u} = b - A\bar{x} \tag{5}$$

ненулевой, то исходная система (1) не имеет решения. Если $\bar{u} = 0$, то, очевидно, $\bar{x}$ есть решение системы (1).

видно, $\bar{x}$ есть решение системы (1).

Из условия оптимальности

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

следует, что вектор $\bar{x}$ может быть получен как решение системы уравнений

$$A^{\mathrm{T}} A x = A^{\mathrm{T}} b \tag{6}$$

с симметричной, неотрицательно определенной матрицей $A^{\mathrm{T}} A$.

Задачу (4), введя вектор дополнительных переменных $u \in R^m$, можем представить в виде

$$\frac{1}{2} \sum u_i^2 \to \min, \tag{7}$$

$$Ax + u = b. \tag{8}$$

Ее решение составляют векторы $\bar{x}$ и $\bar{u}$.

Воспользуемся теоремой 3а главы 3 для задачи (7), (8). Вектор множителей Лагранжа ограничений (8) совпадает с вектором $\bar{u}$. Получаем, что векторы $\bar{x}$, $\bar{u}$ будут оптимальными решениями задачи (7), (8) в том и только том случае, если они составляют решение системы линейных уравнений

$$Ax + u = b, \tag{9}$$

$$A^{\mathrm{T}} u = 0. \tag{10}$$

Здесь ограничение (9) – условие допустимости решения для задачи (7), (8), ограничение (10) – дополнительное условие, обеспечивающее оптимальность.

Систему уравнений (9), (10) можно также рассматривать как необходимое и достаточное условие оптимальности по той же теореме 3а другой задачи оптимизации, в которой ограничение (10) является условием допустимости:

$$\frac{1}{2} \sum u_i^2 - b^{\mathrm{T}} u \to \min, \tag{11}$$

$$A^{\mathrm{T}} u = 0. \tag{12}$$

Оптимальным решением данной задачи будет вектор $\bar{u}$ (решение у этой задачи всегда единственное). Вектор $\bar{x}$ будет состоять из множителей Лагранжа ограничений (12).

Итак, рассматриваемая здесь проблема (4) была представлена в трех взаимосвязанных формах: в виде двух задач оптимизации (7), (8) и (11), (12), которые можем назвать взаимно двойственными, и в виде системы уравнений (9), (10), выражающей условие оптимальности этих двух задач.

Далее еще не раз будут рассматриваться такого типа три взаимосвязанные постановки в виде двух взаимно двойственных задач оптимизации и в виде систем уравнений и неравенств.

Заметим, что по теореме 3а для вектора $\overline{u}$ должно выполняться равенство

$$b^{\mathrm{T}}\overline{u} = \sum \overline{u}_i^2 .$$

Если система (1) совместна, то $\overline{u} = 0$ и приведенное равенство выполняется как тривиальное. Если система (1) несовместна, то $\overline{u} \neq 0$, вектор

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sum \overline{u}_i^2}\overline{u}$$

будет решением альтернативной системы (2), (3). Причем это будет решение с минимальной евклидовой нормой, т.е. вектор $\tilde{u}$ будет решением задачи

$$\sum u_i^2 \to \min$$

при условиях (2), (3).

Минимизация сумм квадратов невязок альтернативной системы. Применим изложенное выше к альтернативной системе (2), (3). Пусть вектор $\tilde{u}$ является решением задачи безусловной оптимизации

$$\varphi(u) = \left\| A^{\mathrm{T}}u \right\|^2 + (b^{\mathrm{T}}u - 1)^2 \to \min, u \in R^m . \qquad (13)$$

Из условия оптимальности

$$\nabla\varphi(\tilde{u}) = 0$$

следует, что задача (13) сводится к решению системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей

$$(AA^{\mathrm{T}} + bb^{\mathrm{T}})u = b . \qquad (14)$$

Если m значительно меньше n, то такой путь вычислений может быть предпочтительнее рассмотренного ранее, базирующегося на решении системы (6).

Если $\varphi(\tilde{u}) = 0$, то $\tilde{u}$ – решение альтернативной системы (2), (3). Исходная система (1) не имеет решения.

Если $\varphi(\tilde{u}) > 0$, то (как будет показано ниже) $\delta(\tilde{u}) > 0$, где

$$\delta(u) = 1 - b^{\mathrm{T}}u . \qquad (15)$$

Вектор

$$\tilde{x} = \frac{-1}{\delta(\tilde{u})} A^{\mathrm{T}} \tilde{u} \tag{16}$$

будет решением исходной системы (1).

Задачу (13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(\sum y_i^2 + \delta^2) \to \min, \tag{17}$$

$$A^{\mathrm{T}} u + y = 0, \quad b^{\mathrm{T}} u + \delta = 1, \tag{18}$$

где δ и компоненты вектора $y \in R^m$ являются дополнительными переменными. Решение этой задачи вместе с вектором $\tilde{u}$ составляют

$$\tilde{y} = -A^{\mathrm{T}} \tilde{u}, \quad \tilde{\delta} = \delta(\tilde{u}).$$

Заметим, что компоненты вектора $\tilde{u}$ вместе с величиной $\tilde{\delta}$ являются множителями Лагранжа ограничений задачи (17), (18). Из теоремы 3а вытекает, что эта задача имеет то же решение, что и следующая система линейных уравнений:

$$A^{\mathrm{T}} u + y = 0, \quad b^{\mathrm{T}} u + \delta = 1, \tag{19}$$

$$Ay + \delta b = 0. \tag{20}$$

Из теоремы 3а также следует, что система уравнений (19), (20) имеет то же решение, что и следующая задача оптимизации:

$$\frac{1}{2}(\sum y_j^2 + \delta^2) - \delta \to \min, \tag{21}$$

$$-Ay - \delta b = 0. \tag{22}$$

Вектор $\tilde{u}$ состоит из множителей Лагранжа ограничений данной задачи. Для ее оптимального решения по теореме 3а

$$\sum \tilde{y}_j^2 + \tilde{\delta}^2 = \tilde{\delta}.$$

Отсюда и из условия (22), в силу того что $b \neq 0$, следует, что

$$1 > \tilde{\delta} \geq 0.$$

Причем $\tilde{\delta} = 0$, если $\tilde{y}_j = 0$ для всех $j = 1, ..., n$, т.е. если вектор $\tilde{u}$ является решением альтернативной системы. Если альтернативная система не совместна, то $\tilde{\delta} > 0$ и по формуле

$$\tilde{x} = \frac{-1}{\tilde{\delta}} \tilde{y},$$

совпадающей с правилом (16), определяется решение системы (1). Причем, как следует из задачи (21), (22), вектор $\tilde{x}$ будет решением системы (1) с минимальной нормой, т.е. он будет решением задачи

$$\sum x_j^2 \to \min, \ Ax = b.$$

7. 2. Задачи минимизации сумм квадратов невязок исходной и альтернативной систем линейных неравенств

Пусть A – матрица $m \times n$, $b \in R^m$. Рассмотрим систему линейных неравенств относительно вектора переменных $x \in R^n$:

$$Ax \geq b. \tag{23}$$

Альтернативной (23) будет следующая система линейных уравнений и неравенств относительно вектора переменных $u \in R^m$:

$$A^{\mathrm{T}} u = 0, \quad b^{\mathrm{T}} u = 1, \quad u \geq 0. \tag{24}$$

Для поиска решения и идентификации несовместности системы (23) могут применяться аналоги двух подходов, рассмотренных в разделе 7.1 применительно к системам линейных уравнений. Оба подхода сводятся к вычислительной проблеме безусловной минимизации выпуклой функции. В первом случае число переменных равно n, во втором – m.

Минимизация суммы квадратов невязок исходной системы. Рассматривается задача

$$f(x) = \|(b - Ax)_+\|^2 \to \min, \tag{25}$$

где

$$\|(b - Ax)_+\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (\max\{0, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\})^2,$$

a_{ij} – коэффициенты матрицы A, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$.

Пусть $\bar{x}$ – решение данной задачи. Если $f(\bar{x}) = 0$, то $\bar{x}$ – решение исходной системы (23). Если $f(\bar{x}) > 0$, то система (23) не совместна.

Введя дополнительные переменные, составляющие вектор $y \in R^m$, задачу (25) можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (y_j)_+^2 \to \min, \tag{26}$$

$$Ax + y = b. \tag{27}$$

Оптимальное решение данной задачи составляют векторы $\bar{x}$ и

$$\bar{y} = b - A\bar{x}.$$

Обозначим $\bar{u}$ вектор множителей Лагранжа ограничений (26).

По теореме 3а главы 3, векторы $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$ являются решением системы уравнений

$$Ax + y = b,$$

$$A^{\mathrm{T}}u = 0,$$

$$u = y_+.$$

К этой же системе сводятся, по теореме 4 главы 5, необходимые и достаточные условия следующей задачи оптимизации:

$$\frac{1}{2}\sum u_i^2 - b^{\mathrm{T}}u \to \min, \tag{28}$$

$$A^{\mathrm{T}}u = 0, \quad u \geq 0. \tag{29}$$

Вектор $\bar{u}$ является решением данной задачи. Вектор $\bar{x}$ состоит из множителей Лагранжа ограничений-равенств. Из теоремы 5.4 также следует, что

$$\sum \bar{u}_i^2 = b^{\mathrm{T}}\bar{u}.$$

Если $\bar{u} \neq 0$, то вектор

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sum \bar{u}_i^2}\bar{u}$$

будет решением альтернативной системы (24). Причем это будет решение с минимальной евклидовой нормой, т.е. решение задачи

$$\sum u_i^2 \to \min$$

при условиях (24).

Отметим, что если бы решалась только задача оптимизации (28), (29) без определения множителей Лагранжа ее ограничений, то по полученному решению $\bar{u}$ можно было бы только судить, имеет или нет решение исходная система. Если $\bar{u} = 0$, то система (23) имеет решение. Если $\bar{u} \neq 0$, то система (23) не имеет решения. Аналогичную ситуацию мы имели для систем линейных уравнений.

Минимизация суммы квадратов невязок альтернативной системы. Рассмотрим задачу минимизации выпуклой дифференцируемой функции при ограничениях-неравенствах на переменные

$$\varphi(u) \equiv \left\| A^{\mathrm{T}}u \right\|^2 + (\delta(u))^2 \to \min,\ u \geq 0,$$

где

$$\delta(u) = 1 - b^{\mathrm{T}}u .$$

Обозначим $\overline{u}$ – решение данной задачи. Если $\varphi(\overline{u}) = 0$, то вектор $\overline{u}$ является решением альтернативной системы (24), а исходная система (23) не имеет решений.

Введем дополнительные переменные, составляющие вектор $y \in R^n$. Задача (25) представляется в виде

$$\frac{1}{2}(\sum y_j^2 + (\delta(u))^2) \to \min, \tag{30}$$

$$y - A^{\mathrm{T}}u = 0, \quad u \geq 0. \tag{31}$$

По теореме 5.4 эта задача равносильна следующей системе линейных неравенств

$$Ay \geq \delta b, \tag{32}$$

$$y - A^{\mathrm{T}}u = 0, \quad u \geq 0, \tag{33}$$

$$\delta = \delta(u). \tag{34}$$

Решение задач (30), (31) и (32)–(34) составляют векторы $\widetilde{u}$, $\widetilde{\delta} = \delta(\widetilde{u})$ и некоторый вектор $\widetilde{y}$, являющийся также вектором множителей Лагранжа ограничений-равенств в задаче (30), (31).

Система (32)–(34) представляет также по теореме 5.4 необходимые и достаточные условия задачи оптимизации:

$$\frac{1}{2}(\sum u_j^2 + \delta^2) - \delta \to \min, \tag{35}$$

$$-Ay - \delta b \leq 0. \tag{36}$$

Вектор $\overline{u}$ состоит из множителей Лагранжа ограничений данной задачи. Для оптимального решения

$$\sum u_j^2 + \widetilde{\delta}^2 = \widetilde{\delta}. \tag{37}$$

Если и только если $\widetilde{y} = 0$, то $\widetilde{\delta} = 0$. В этом и только этом случае вектор $\overline{u}$ является решением альтернативной системы.

Если же альтернативная система несовместна, $\widetilde{y} \neq 0$, то по условию (37) $1 > \widetilde{\delta} > 0$ и вектор

$$\overline{x} = \frac{-1}{\delta}\tilde{y}$$

будет решением исходной системы (23). Причем, когда это следует из задачи (35), (36) вектор $\widetilde{x}$ будет решением системы (23) с минимальной евклидовой нормой, т.е. он будет решением задачи лидовой нормой, т.е. он будет решением задачи

$$\sum x_j^2 \to \min\,,\ Ax \geq b\,.$$

Изложенный здесь подход к поиску решения систем линейных неравенств с наименьшей нормой на основы минимизации суммы квадратов невязок двойственной системы был введен и активно развивается в работах А. И. Голикова и Ю. Г. Евтушенко. Ими получены приведенные выше расчетные формулы, в том числе и для систем линейных неравенств других видов. Более подробно с результатами этих исследований А. И. Голикова и Ю. Г. Евтушенко и приложениями этих исследований можно познакомиться в работах [6, 7].

7.3. Решение систем нелинейных неравенств методом линеаризации

Обсуждавшаяся в предыдущем параграфе задача минимизации сумм квадратов невязок альтернативной системы линейных неравенств может использоваться в качестве составной части алгоритмов решения систем нелинейных неравенств.

Системы нелинейных неравенств. Рассмотрим задачу нахождения вектора $x \in R^n$, удовлетворяющего условию

$$g(x) \leq 0. \tag{38}$$

Здесь $g(x)$ – вектор-функция с компонентами $g_i(x), i = 1,\ldots,m.$ Причем функции g_i непрерывно дифференцируемые, т.е. при любом $x \in R^n$ для любого $i = 1,\ldots,n$ существует вектор частных производных $\nabla g_i(x) \in R^n$, все компоненты которого являются непрерывными функциями от x.

Обозначим h функцию от вектора $x \in R^n$, равную сумме квадратов невязок системы (38)

$$h(x) = \sum_{i=1}^{m} (g_i(x))_+^2.$$

Отметим, что проблему поиска решения системы (38) можно представить в виде задачи безусловной оптимизации

$$h(x) \to \min,\ x \in R^n. \tag{39}$$

Система (38) имеет решение в том и только том случае, если задача (39) имеет оптимальное решение со значением целевой функции, равным нулю. Такое оптимальное решение будет решением системы (38).

Метод линеаризации. Пусть задано некоторое начальное приближение – вектор $x^0 \in R^n$. С этого вектора начинается вычислительный процесс.

Обозначим $k = 0,1,2,\ldots$ – номера итераций. В начале k-й итерации считается заданным вектор $x^k \in R^n$. Если этот вектор удовлетворяет условию (38)

$$g(x^k) \le 0,$$

то вычисления заканчиваются.

Иначе, т.е. если

$$g(x^k) > 0, \tag{40}$$

осуществляется итеративный переход. Для этого сначала найдем направление корректировки решения. Обозначим его s^k.

Направление корректировки решения s^k определяется как решение задачи поиска вектора $s \in R^n$ из условий

$$\frac{1}{2}\|s\|^2 \to \min, \tag{41}$$

при ограничении

$$A^k s \ge b^k. \tag{42}$$

Здесь

$$b^k = g(x^k),$$

A^k – матрица размера $m \times n$, строки которой состоят из векторов $-\nabla g_i(x^k),\ i = 1,\ldots,m.$

В качестве пояснения отметим, что условие (42) является линеаризацией в точке x^k исходного условия (38). Действительно, неравенство (42) является матричной формой записи следующей системы линейных неравенств относительно $s \in R^n$

$$g_i(x^k) + \left\langle \nabla g_i(x^k), s \right\rangle \le 0,\ \ i = 1,\ldots,m.$$

Конечно, если вектор s – решение системы (42), то не обязательно вектор $x^k + s$ будет решением исходной системы (38). Линеаризация имеет погрешность – она не является точным выражением исходной функции. Чем дальше отстоит вектор $x^k + s$ от вектора x^k, тем менее точно условие (42) выражает исходное условие (38). Этим объясняется введение целевой функции (41) во вспомогательную задачу поиска направления корректировки решения. В силу непрерывности производных функций g_i можно ожидать, что с уменьшением расстояния от вектора x^k до вектора $x^k + s$ будут уменьшаться погрешности линеаризации.

Если система линейных неравенств (42) совместная, то задача (41), (42) имеет единственное решение.

После нахождения вектора s^k определим шаг корректировки решения

$$\lambda_k = \arg\min_{x \ge 0} h(x^k + \lambda s^k).$$

Затем осуществляем итеративный переход

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k.$$

Задание 1. *Пусть вектор x^k не является решением исходной системы (38), вектор s^k является решением вспомогательной задачи (41), (42). Доказать, что при некотором $\alpha > 0$ для всех $\beta \in (0, \alpha]$*

$$0 \le h(x^k + \beta s^k) < h(x^k).$$

Задание 2. *Доказать, что если выполняется условие (40) и задача (41), (42) имеет решение, то*

$$h(x^{k+1}) < h(x^k).$$

Задание 3. *Пусть система (38) совместна, множество*

$$L = \left\{x \in R^n : h(x) \le h(x^0)\right\}$$

ограниченное, на всех итерациях вектор x^k не является решением системы (38), при этом вспомогательная задача (41), (42) имеет решение на всех итерациях. Тогда

$$\lim_{h \to \infty} h(x^k) = 0,$$

последовательность векторов x^k сходится при $k \to \infty$ к множеству решений системы (38).

Для решения вспомогательной задачи (41), (42) можно воспользоваться задачей поиска вектора $u \in R^m$ из условия

$$\varphi_k(u) \to \min, \quad u \ge 0 \tag{43}$$

где

$$\varphi_k(u) = \left\|(A^k)^T u\right\|^2 + (1 - \left\langle b^k, u \right\rangle)^2.$$

Данная задача всегда имеет решение. Пусть оно составляет вектор u^k.

Если

$$\varphi_k(u) > 0,$$

то согласно приведенным во второй части предыдущего параграфа фактам

$$\rho^k > 0,$$

где

$$\rho^k = 1 - \left\langle b^k, u \right\rangle.$$

Решение вспомогательной задачи (41), (42) может быть получено по формуле

$$s^k = \frac{-1}{\rho^k}(A^k)^T u^k.$$

Если m значительно меньше n, то поиск решения вспомогательной задачи (41), (42) лучше будет осуществлять по указанному здесь пути на основе решения задачи (43).

Задача (43) может также служить для идентификации ситуации отсутствия решения у вспомогательной задачи (41), (42). В этом и только этом случае

$$\varphi_k(u^k) = 0.$$

Конечно, в общем случае несовместность условий линеаризованной задачи не означает, что исходная система линейных неравенств (38) не имеет решения. Вместе с тем в некоторых важных для приложений ситуациях несовместность условий линеаризованной системы влечет несовместность ограничений исходной системы.

Задание 4. *Доказать, что если все функции g_i выпуклые, то отсутствие решения у системы линейных неравенств относительно вектора $s \in R^n$*

$$g_i(x) + \langle \nabla g_i(x), s \rangle \le 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

при каком-либо $x \in R^n$ означает, что исходная система (38) не имеет решения.

Пример 1. Рассмотрим решение системы нелинейных неравенств

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 - 1 \le 0, \\ g_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 - 1 \le 0 \end{cases}$$

методом линеаризации.

В качестве стартовой точки выберем вектор $(x^0)^T = (1, 1, 1)$. Этот вектор не удовлетворяет исходной системе, следовательно, осуществляем итеративный переход.

На первой итерации алгоритма линеаризации (37)–(45), линеаризовав систему в точке x^0 согласно (42), необходимо решить вспомогательную задачу поиска направления корректировки:

$$\frac{1}{2}\langle s, s \rangle \to \min_{s \in R^3},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \le 0. \right.$$

Эту задачу можно решать различными численными методами, например, барьерных или штрафных функций. Ее решением будет вектор $s^1 = (-0,49; -0,49; 1,34)$. Для поиска шага корректировки требуется решить задачу одномерной минимизации (39) относительно λ:

$$\left(\max\left\{0, 2(1 - 0,49\lambda)^2 + (1,34\lambda - 3)^2 - 1\right\}\right)^2 + \left(\max\left\{0, 2(1 - 0,49\lambda)^2 + (1,34\lambda - 1)^2 - 1\right\}\right)^2 \to \min_{\lambda \in R^1}.$$

Решая ее одним из стандартных методов, например, делением пополам или золотого сечения, получим $\lambda_1 = 1,500$.

Итеративный переход осуществляется по формуле: $x^1 = x^0 + \lambda_1 s^1 = (0,268; 0,268; 3,01)$. При подставке найденной точки x^1 в исходную нелинейную систему, получаем, что неравенства не выполняются. Переходим ко второй итерации метода линеаризации.

Линеаризуем исходную систему уже в точке x^1. Составляем вспомогательную задачу поиска направления корректировки (41)–(42). По аналогии с первой итерацией находим направление корректировки решения $s^2 = (-0.078, -0.189, -0.012)$, шаг $\lambda_2 = 5.55209$. Осуществляем итеративный переход $x^2 = x^1 + \lambda_2 s^2 = (-0.017, -0.783, 2.947)$.

Вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока полученная точка $x^k, k = 3, 4, \ldots$ не будет удовлетворять исходной нелинейной системе. Оптимальным будет решение $x^* = (0; 0; 3)$.

Задачи к главе 7

1. Используя математический пакет Matlab или Maple, на основе минимизации суммы квадратов невязок исходной и альтернативной систем линейных уравнений численно решить систему уравнений $Ax = b$, где $A-$матрица размера 5×10, $b-$вектор R^5 или установить, что она не имеет решений (указать решение ей альтернативной).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Указание. Можно использовать решения систем (7.6) и (7.14) главы 7.

2. Используя математический пакет Matlab или Maple, численно решить систему линейных неравенств $Ax \ge b$ на основе минимизации суммы квадратов невязок исходной и альтернативной системы. Сравнить по количеству итераций и времени, потребовавшихся на решение этих задач. Организовать нахождение решения двойственной задачи наряду с исходной.

Здесь где $A-$*м*атрица размера 5×10, $b-$вектор R^5 из задания 1.

Библиографический список

1. **Астафьев Н.Н**. Линейные неравенства и выпуклость. – М.: Наука, 1982. – 152 с.
2. **Астафьев Н.Н**. Некоторые элементарные преобразования двойственных задач линейного программирования. Попарная альтернативность // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики. – Новосибирск: Наука. – 2003. – С. 46-55.
3. **Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю**. Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых режимов электроэнергетических систем. – Иркутск, 1997. – 30с.
4. **Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю**. Исследование итеративной процедуры определения допустистимых режимов ЭЭС // Изв. РАН. Энергетика. – 2000. – №6. – С. 64-73.
5. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1963. – 418 с.
6. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Двойственный подход к решению систем линейных равенств и неравенств// Труды XII Байкальской междунар. конф. «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИГУ, 2001. – С. 91-99.
7. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381, № 4. – С. 444-447.
8. **Еремин И.И.** Двойственность для регуляризованных задач линейного программирования // Проблемы оптимизации и экономические приложения: Материалы конференции. – Омск: Омский филиал ИМ СО РАН, 2003.
9. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации.– Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1998. – 247 с.
10. **Зоркальцев В.И.** Теорема Фаркаша и теория двойственности в линейной оптимизации: препринт. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. – 15 с.
11. **Зоркальцев В.И., Хамисов О.В.** Равновесные модели в экономике и энергетике. – Новосибирск: Наука, 2006. – 221 с.
12. **Зоркальцев В.И**. Обоснование алгоритмов внутренних точек // Журнал вычисл. математики и матем. физики. – 1999. – Том. 34. – №2. – С. 222-234.
13. **Зоркальцев В.И**. Обоснование семейства проективных алгоритмов (процессы, совмещающие ввод в область допустимых решений с оптимизацией): препринт. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 1998. – 61 с.

14. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Прогресс, 1975.
15. **Ланкастер К.** Математическая экономика. – М.: Сов. Радио, 1972. – 469 с.
16. **Пшеничный Б.П.** Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136с.
17. **Рокафеллар. Р.** Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 469 с.
18. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
19. **Broyden C.G.** On theorems of the alternative // Optimization methods and software. – 2001. – Vol. 16. – P. 101-111.
20. **Broyden C.G.** A simple algebraic proof of Farkas's lemma and related theorems // Optimization methods and software. – 2000. – Vol. 8. – P. 185-199.

Учебное издание

Зоркальцев Валерий Иванович
Киселева Марина Александровна

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

ISBN 978-5-9624-0197-3

План 2007. Поз. 74.

Подписано в печать 30.08.07. Формат 60х84 1/16
Печать офсетная. Уч.–изд. л. 4,5. Тираж 125 экз.

Издательство Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36