ТЕМА: общественный выбор
Задачи и решения

КОНТРОЛЬНАЯ № 1

1) Определите каким аксиомам порядка (транзитивнось, полнота, монотонность) удовлетворяют следующие отношения предпочтения $\mathbb{R}^2_+$, являются ли они рациональными. Обоснуйте ответ.

a) $z \succcurlyeq x \iff \min\{\langle(1,1),(z-x)\rangle, \langle(4,1),(z-x)\rangle\} \geq 0$,

b) $z \succcurlyeq x \iff z_1 - x_2 + z_2 - x_1 + z_2 x_1 - x_2 z_1 \geq 0$.

Решение. a) отношение $z \succcurlyeq x$ можно определить в эквивалентном виде как множество всех неотрицательных решений системы $\begin{cases} z_1 + z_2 \geq x_1 + x_2 \\ 4z_1 + z_2 \geq 4x_1 + x_2 \end{cases}$.

Транзитивность. Пусть $z \succcurlyeq x \succcurlyeq y$. Имеем:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ 4z_1 + z_2 \geq 4x_1 + x_2 \geq 4y_1 + y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 \geq y_1 + y_2 \\ 4z_1 + z_2 \geq 4y_1 + y_2 \end{cases} \Rightarrow z \succcurlyeq y.$$

Полнота. Рассмотрим любые $z, x \in \mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющие системе $\begin{cases} z_1 + z_2 > x_1 + x_2 \\ 4z_1 + z_2 < 4x_1 + x_2 \end{cases}$. Тогда неверно $z \succcurlyeq x$ и, одновременно, неверно $x \succcurlyeq z$. Значит, векторы z, x *несравнимые* и отношение неполное (такие пары векторов существуют, напр. $(z_1, z_2) = (x_1 - \varepsilon, x_2 + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

Монотонность. Если $z \geq x$, то всегда выполнено

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq x_1 + x_2 \\ 4z_1 + z_2 \geq 4x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow z \succcurlyeq x.$$

b) Преобразуем определение предпочтения:

$$z \succcurlyeq x \iff 1 + z_1 + z_2(x_1 + 1) \geq 1 + x_1 + x_2(z_1 + 1) \iff$$
$$\iff (1 - x_2)(1 + z_1) \geq (1 - z_2)(1 + x_1) \iff \tfrac{z_2 - 1}{1 + z_1} \geq \tfrac{x_2 - 1}{1 + x_1}.$$

Значит, предпочтение задаётся функцией $u(y) = \frac{y_2 - 1}{1 + y_1}$ и, следовательно, является *рациональным* (транзитивность + полнота).

Монотонность. Рассмотрим верхнее лебеговское множество уровня c, т. е. множество $\{y = (y_1, y_2) \geq 0 : u(y) \geq c\}$. Условие $u(y) \geq c \iff y_2 - 1 \geq c(y_1 + 1) \iff -cy_1 + y_2 \geq c + 1$. Пусть $u(x) = c \iff -cx_1 + x_2 = c + 1$. Для того, чтобы для каждого $z \geq x$ имело место $u(z) \geq u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $-cz_1 + z_2 \geq c + 1 = -cx_1 + x_2$, т. е. должно быть $\langle(-c, 1), z - x)\rangle \geq 0$. Так как $z - x \geq 0$ может быть любым неотрицательным вектором, то для всех таких z неравенство выполняется только если $0 \geq c = \frac{x_2 - 1}{1 + x_1} \iff x_2 \leq 1$. Таким образом, монотонность предпочтения выполнена в области $0 \leq x_2 \leq 1$. Другой способ: дифференцируя полезность, находим $\nabla_x u(x) = (-\frac{x_2 - 1}{(x_1 + 1)^2}, \frac{1}{x_1 + 1})$. Предпочтение монотонно в области $\nabla_x u(x) \geq 0 \iff 0 \leq x_2 \leq 1$.

2) Пусть компания Ann, Bob, Costya обсуждает совместные планы, имея 6 вариантов, характеризуемых векторами полезностей u_A, u_B, u_C так:

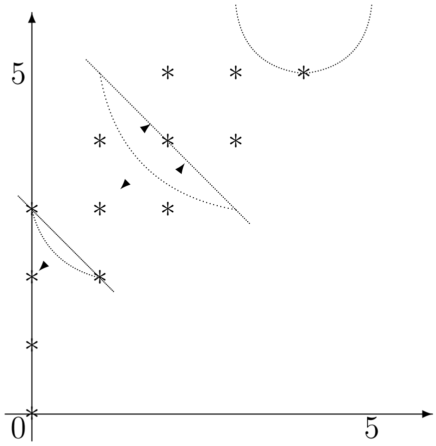
$$\begin{array}{r} alternative = \\ u_A(.) = \\ u_B(.) = \\ u_C(.) = \\ answer = \end{array} \begin{pmatrix} Bar \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ {}_? \ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Sad \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ {}_? \ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Kino \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ {}_? \ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Les \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ {}_?wP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tancy \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ {}_? \ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Muzei \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ {}_? \ P \end{pmatrix}$$

а) Отметьте рядом со знаком "?" слабые оптимумы Парето — знаком "wP"; кроме того, найдите сильные оптимумы Парето и пометьте их знаком "P", а "никакие" векторы обозначьте прочерком.

b) Пусть в задаче каждый участник, не вступая ни в какие коалиции, (оставаясь дома) может обеспечить себе уровень полезности =2. Какие варианты будет рассматривать компания (надо найти переговорное множество)?

Решение. Граница Парето найдена прямой проверкой определения и обозначена в таблице. Переговорное множество это те оптимумы по Парето, где полезности каждого из индивидов ≥ 2, здесь это $\{Les, Tancy, Muzei\}$ — слабое переговорное и $\{Tancy, Muzei\}$ — сильное переговорное множества.

3) Найдите *слабую* и *сильную* границу Парето в модели обмена с неделимыми продуктами. Имеется 2 продукта, общее количество каждого 5 единиц. Потребительские наборы имеют вид (m, k), где $m, k \in \mathbb{Z}_+$ целочисленные неотрицательные величины. Предпочтения заданы функциями полезности: $u_1(x) = -(x_1 - 4)^2 - (x_2 - 6)^2$, $u_2(y) = y_1 + y_2$. Обоснуйте ответ и изобразите его графически на ящике Эджворта.



Сильная гр. Парето изображена на графике как $*$. Точки слабой границы, но не из сильной, отмечены кружочками. Решение поясняют две "лунки": В лунке, где крайние точки кружочки, имеется точка $(2, 4)$, слабо доминирующая кружочки, но сильно доминирующих нет. Во второй лунке вообще нет допустимых точек кроме крайних $*$. В этом можно убедиться прямым вычислением расстояния до точки насыщения 1-го агента $(4, 6)$.

4) В экономике обмена функции полезности и запасы двух потребителей равны: $u_1(x) = \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2^5} \cdot e^{\frac{x_1 + 2x_2}{3}}$, $u_2(y) = -4y_1^2 - 2y_2^2 + 28y_1 + 21y_2$, $\omega_1 = (1, 2)$, $\omega_2 = (2, 2)$, $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 = (3, 4)$. Изобразить графически границу Парето, кривую (или множество) контрактов.

Решение. Не меняя предпочтения 1-го агента, упростим представляющую его функцию полезности, полагая, для $(x_1, x_2) \gg 0$: $v_1(x) = \ln[u_1(x)^6] = \ln(x_1) + 5\ln(x_2) + 2x_1 + 4x_2 \quad \Rightarrow$

$$\nabla_x v_1(x) = \left(\frac{2x_1+1}{x_1}, \frac{4x_2+5}{x_2} \right).$$

Найдём градиент полезности 2-го:

$$\nabla_x u_2(\bar{\omega} - x) = -\nabla_y u_2(\bar{\omega} - x) = -\left(8x_1 + 4, 4x_2 + 5\right).$$

Далее исследуем вытекающие из задачи оптимизации варианты:

a) $(0,0) \ll (x_1,x_2) \ll (3,4) \Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0$:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{2x_1+1}{x_1} \\ \frac{4x_2+5}{x_2} \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} 4(2x_1+1) \\ 4x_2+5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} 4x_1 \\ x_2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad 4x_1 = x_2.$$

b) $x_2 = 4$, $0 < x_1 < 3$ (верхняя грань) $\Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0$:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{2x_1+1}{x_1} - \lambda 4(2x_1+1) \\ \frac{4x_2+5}{x_2} - \lambda(4x_2+5) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} =0 \\ \geq 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \lambda = \frac{1}{4x_1} \\ \lambda \leq \frac{1}{x_2} = \frac{1}{4} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq 1.$$

c) $x_1 = 3$, $0 < x_2 < 4$ (правая грань) $\Rightarrow \exists\ \lambda \geq 0$:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{2x_1+1}{x_1} - \lambda 4(2x_1+1) \\ \frac{4x_2+5}{x_2} - \lambda(4x_2+5) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \geq 0 \\ = 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} \lambda \leq \frac{1}{4x_1} = \frac{1}{12} \\ \lambda = \frac{1}{x_2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq 12 - \text{невозможно}.$$

d) $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, но $x \neq 0$. Тогда $u_1(x) = 0$ и $u_1(x) > 0$ при $x \gg 0$. Однако $\bar{\omega}$ это единственная точка максимума функции $u_2(y)$ для $0 \leq y \leq \bar{\omega}$, что следует из желательности всех продуктов для 2-го агента в рамках данной области (ибо $\nabla_y u_2(y) \gg 0$). Пусть, например, $x_2 = 0$. Тогда для каждого $y_1 = \delta \in [0,3)$ найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $u_2(3-\varepsilon, 4-\varepsilon) > u_2(\delta, 4)$. Но $u_1(\varepsilon,\varepsilon) > 0 = u_1(3-\delta, 0)$. Значит, распределение $((\varepsilon,\varepsilon),(3-\varepsilon,4-\varepsilon))$ сильно доминирует по Парето распределение $((3-\delta,0),(\delta,4))$.

Отметим, что точки $(0,0)$ и $(3,4)$ принадлежат замыканию уже выявленной части границы Парето и поэтому сами являются (слабыми) оптимумами Парето.

В итоге получаем ответ: граница Парето является объединением двух отрезков: в потреблениях 1-го это отрезок, составленный из точек $(x_1, 4x_1)$, $0 \leq x_1 \leq 1$, и отрезок $(x_1, 4)$, $1 \leq x_1 \leq 3$.

КОНТРОЛЬНАЯ № 2

1) Определите каким аксиомам порядка (транзитивнось, полнота, монотонность) удовлетворяют следующие отношения предпочтения $\mathbb{R}^2_+$, являются ли они рациональными. Обоснуйте ответ.

a) $z \succcurlyeq x \iff \min\{\langle(1,2),(z-x)\rangle, \langle(3,1),(z-x)\rangle\} \geq 0$,

b) $z \succcurlyeq x \iff z_1 - x_2 + z_2 - x_1 - z_2x_1 + x_2z_1 \geq 0$.

Решение. a) отношение $z \succcurlyeq x$ можно определить в эквивалентном виде как множество всех неотрицательных решений системы $\left\{\begin{array}{l} z_1 + 2z_2 \geq x_1 + 2x_2 \\ 3z_1 + z_2 \geq 3x_1 + x_2 \end{array}\right.$.

Транзитивность. Пусть $z \succcurlyeq x \succcurlyeq y$. Имеем:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 + 2z_2 \geq x_1 + 2x_2 \geq y_1 + 2y_2 \\ 3z_1 + z_2 \geq 3x_1 + x_2 \geq 3y_1 + y_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_1 + 2z_2 \geq y_1 + 2y_2 \\ 3z_1 + z_2 \geq 3y_1 + y_2 \end{array}\right. \Rightarrow z \succcurlyeq y.$$

Полнота. Рассмотрим любые $z, x \in \mathbb{R}^2_+$, удовлетворяющие системе $\left\{\begin{array}{l} z_1 + 2z_2 > x_1 + 2x_2 \\ 3z_1 + z_2 < 3x_1 + x_2 \end{array}\right.$. Тогда неверно $z \succcurlyeq x$ и, одновременно, неверно $x \succcurlyeq z$. Значит, векторы z, x *несравнимые* и отношение неполное (такие пары векторов существуют, напр. $(z_1,z_2) = (x_1-\varepsilon, x_2+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

Монотонность. Если $z \geq x$, то всегда выполнено

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 \geq x_1 + 2x_2 \\ 3z_1 + z_2 \geq 3x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow z \succcurlyeq x.$$

b) Преобразуем определение предпочтения:

$z \succcurlyeq x \iff 1 + z_1 + z_2(1 - x_1) \geq 1 + x_1 + x_2(1 - z_1) \iff$

$\iff (1 - x_1)(1 + z_2) \geq (1 - z_1)(1 + x_2) \iff \frac{z_1 - 1}{1 + z_2} \geq \frac{x_1 - 1}{1 + x_2}$.

Значит, предпочтение задаётся функцией $u(y) = \frac{y_1 - 1}{1 + y_2}$ и, следовательно, является *рациональным* (транзитивность + полнота).

Монотонность. Рассмотрим верхнее лебеговское множество уровня c, т. е. множество $\{y = (y_1, y_2) \geq 0 : u(y) \geq c\}$. Условие $u(y) \geq c \iff y_1 - 1 \geq c(y_2 + 1) \iff y_1 - cy_2 \geq c + 1$. Пусть $u(x) = c \iff x_1 - cx_2 = c + 1$. Для того, чтобы для каждого $z \geq x$ имело место $u(z) \geq u(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $z_1 - cz_2 \geq c + 1 = x_1 - cx_2$, т. е. должно быть $\langle (1, -c), z - x) \rangle \geq 0$. Так как $z - x \geq 0$ может быть любым неотрицательным вектором, то для всех таких z неравенство выполняется только если $0 \geq c = \frac{x_1 - 1}{1 + x_2} \iff x_1 \leq 1$. Таким образом, монотонность предпочтения выполнена в области $0 \leq x_1 \leq 1$. Другой способ: дифференцируя полезность, находим $\nabla_x u(x) = (\frac{1}{x_2 + 1}, -\frac{x_1 - 1}{(x_2 + 1)^2})$. Предпочтение монотонно в области $\nabla_x u(x) \geq 0 \iff 0 \leq x_1 \leq 1$.

2) Пусть компания Ann, Bob, Costya обсуждает совместные планы, имея 6 вариантов, характеризуемых векторами полезностей u_A, u_B, u_C так:

$$\begin{array}{r} alternative = \\ u_A(.) = \\ u_B(.) = \\ u_C(.) = \\ answer = \end{array} \begin{pmatrix} Bar \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ ?\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Sad \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ ?wP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Kino \\ 2 \\ 6 \\ 1 \\ ?\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Les \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ ?wP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tancy \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ ?\ P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Muzei \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ ?\ P \end{pmatrix}.$$

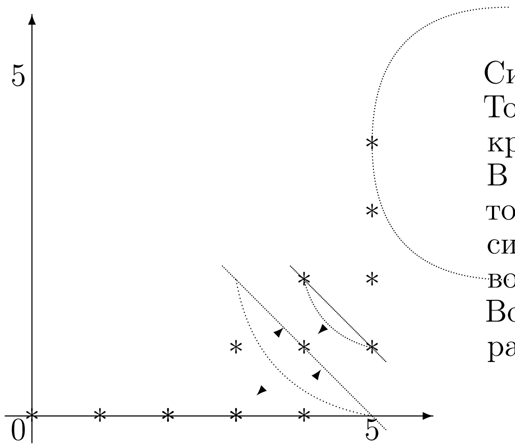
a) Отметьте рядом со знаком “?” слабые оптимумы Парето — знаком “wP”; кроме того, найдите сильные оптимумы Парето и пометьте их знаком “P”, а “никакие” векторы обозначьте прочерком.

b) Пусть в задаче каждый участник, не вступая ни в какие коалиции, (оставаясь дома) может обеспечить себе уровень полезности =2. Какие варианты будет рассматривать компания (надо найти переговорное множество)?

Решение. Граница Парето найдена прямой проверкой определения и обозначена в таблице. Переговорное множество это те оптимумы по Парето, где полезности каждого из индивидов ≥ 2, здесь это $\{Sad, Les, Tancy, Muzei\}$ — слабое переговорное и $\{Tancy, Muzei\}$ — сильное переговорное множества.

3) Найдите *слабую* и *сильную* границу Парето в модели обмена с неделимыми продуктами. Имеется 2 продукта, общее количества каждого 5 единиц. Потребительские наборы имеют вид (m, k), где $m, k \in \mathbb{Z}_+$ целочисленные неотрицательные величины. Предпочтения заданы функциями полезности: $u_1(x) = -(x_1 - 7)^2 - (x_2 - 4)^2$, $u_2(y) = y_1 + y_2$. Обоснуйте ответ и изобразите его графически на ящике Эджворта.

4) В экономике обмена функции полезности и запасы двух потребителей равны: $u_1(x) = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2^3} \cdot e^{\frac{3x_1 + 2x_2}{12}}$, $u_2(y) = -2y_1^2 - y_2^2 + 20y_1 + 15y_2$, $\omega_1 = (2, 2)$, $\omega_2 = (2, 1)$, $\bar{\omega} = \omega_1 + \omega_2 = (4, 3)$. Изобразить графически границу Парето, кривую (или множество) контрактов.



Сильная гр. Парето изображена на графике как $*$. Точки слабой границы, но не из сильной, отмечены кружочками. Решение поясняют две “лунки”: В лунке, где крайние точки кружочки, имеется точка $(4,1)$, слабо доминирующая кружочки, но сильно доминирующих нет. Во второй лунке вообще нет допустимых точек кроме крайних $*$. Во всём этом можно убедиться прямым вычислением расстояния до точки насыщения 1-го агента $(7,4)$.

Решение. Не меняя предпочтения 1-го агента, упростим представляющую его функцию полезности, полагая, для $(x_1,x_2)\gg 0$: $v_1(x)=\ln[u_1(x)^4]=\ln(x_1)+3\ln(x_2)+x_1+\frac{2}{3}x_2 \quad\Rightarrow$

$$\nabla_x v_1(x)=\left(\frac{x_1+1}{x_1},\frac{2x_2+9}{3x_2}\right).$$

Найдём градиент полезности 2-го:

$$\nabla_x u_2(\bar\omega-x)=-\nabla_y u_2(\bar\omega-x)=-\left(4x_1+4,2x_2+9\right).$$

Далее исследуем вытекающие из задачи оптимизации варианты:

a) $(0,0)\ll(x_1,x_2)\ll(3,4)\Rightarrow\exists\ \lambda\geq 0$:

$$\begin{pmatrix}\frac{x_1+1}{x_1}\\ \frac{2x_2+9}{3x_2}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4(x_1+1)\\ 2x_2+9\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4x_1\\3x_2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\frac{4}{3}x_1=x_2.$$

b) $x_2=3$, $0<x_1<4$ (верхняя грань) $\Rightarrow\exists\ \lambda\geq 0$:

$$\begin{pmatrix}\frac{x_1+1}{x_1}-\lambda 4(x_1+1)\\ \frac{2x_2+9}{3x_2}-\lambda(2x_2+9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}=0\\ \geq 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda=\frac{1}{4x_1}\\ \lambda\leq\frac{1}{3x_2}=\frac{1}{9}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_1\geq\frac{9}{4}.$$

c) $x_1=4$, $0<x_2<3$ (правая грань) $\Rightarrow\exists\ \lambda\geq 0$:

$$\begin{pmatrix}\frac{x_1+1}{x_1}-\lambda 4(x_1+1)\\ \frac{2x_2+9}{3x_2}-\lambda(2x_2+9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\geq 0\\ =0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda\leq\frac{1}{4x_1}=\frac{1}{16}\\ \lambda=\frac{1}{3x_2}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x_2\geq\frac{16}{3}-\text{невозможно.}$$

d) $x_1=0$ или $x_2=0$, но $x\neq 0$. Тогда $u_1(x)=0$ и $u_1(x)>0$ при $x\gg 0$. Однако $\bar\omega$ это единственная точка максимума функции $u_2(y)$ для $0\leq y\leq\bar\omega$, что следует из желательности всех продуктов для 2-го агента в рамках данной области (ибо $\nabla_y u_2(y)\gg 0$). Пусть, например, $x_2=0$. Тогда для каждого $y_1=\delta\in[0,4)$ найдётся $\varepsilon>0$ такое, что $u_2(4-\varepsilon,3-\varepsilon)>u_2(\delta,3)$. Но $u_1(\varepsilon,\varepsilon)>0=u_1(4-\delta,0)$. Значит, распределение $((\varepsilon,\varepsilon),(4-\varepsilon,3-\varepsilon))$ сильно доминирует по Парето распределение $((4-\delta,0),(\delta,3))$.

Отметим, что точки $(0,0)$ и $(4,3)$ принадлежат замыканию уже выявленной части границы Парето и поэтому сами являются (слабыми) оптимумами Парето.

В итоге получаем ответ: граница Парето является объединением двух отрезков; в потреблениях 1-го это отрезок составленный из точек $(x_1,\frac{4}{3}x_1)$, $0\leq x_1\leq\frac{9}{4}$ и отрезок $(x_1,3)$, $\frac{9}{4}\leq x_1\leq 4$.

.

ЗАДАЧИ

1) Пусть некая кампания имеет профиль предпочтений:

$$preferences\ profile: \begin{array}{cccc} & Vasia & Kolya & Petya \\ - & --- & --- & --- \\ 1 & Cognac & Vine & Pepsi \\ 2 & Vodka & Shampaign & Vodka \\ 3 & Vine & Cognac & Vine \\ 4 & Shampaign & Vodka & Cognac \\ 5 & Beer & Beer & Pepsi \\ 6 & Pepsi & Pepsi & Beer \end{array}$$

Предположите, что упомянутая компания решает планы на вечер, все планирует пить одинаковую жидкость. Они должны послать кого-то к магазину, и не уверены относительно различной доступности напитков. Тогда они должны дать полный список гонцу: какой напиток является самым лучшим, что является вторым по привлекательности, и так далее. Как могут они решить, что является "коллективным" предпочтением? Это и есть **Проблема Коллективного Выбора**.

Один из наиболее популярных механизмов - голосование простым большинством, известное как правило Кондорсе (Condorcet) (турнир Кондорсе). Когда каждая пара альтернатив проголосована, то победившая все прочие называется Победителем по Кондорсе. Часто он не существует, а упорядочение оказывается нетранзитивно...

Другое популярное правило общественного выбора — правило де Борда (подсчета очков). Каждой строчке профиля присваивается некое число, и шкала этих чисел, пусть, убывает сверху вниз. Альтернатива, набравшая меньше очков по всем участникам станет выше в "общественном" предпочтении (упорядочении), чем набравшая больше (если же очки возрастают снизу вверх, — то наоборот).

Наиболее употребителен в политике метод относительного большинства: избиратели указывают в бюллетене только наиболее желательную альтернативу, и эти очки для каждой альтернативы суммируются. Можно ли это считать вариантом метода Борда?

Найдите общественное предпочтение на данном профиле по обоим методам.

Всегда ли метод ... дает транзитивное упорядочение? Удовлетворяет ли он требованию независимости от посторонних альтернатив? Разный ли результат метода Борда при разных шкалах очков?

Проблема группового выбора в нормативном плане: свойства разных правил голосования

Задача группового выбора в двух формах. Пусть сообщество участников $N = \{1, \ldots, n\}$ имеет профиль предпочтений $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ на конечном или бесконечном множестве альтернатив A. Предпочтение $R_i = (\succeq_i)$ каждого участника i предполагается "рациональным", то есть представляет "полный предпорядок" — полное транзитивное упорядочение (допускается эквивалентность альтернатив, но не циклы). Задача группового выбора в форме прямой демократии состоит в том, чтобы по этому профилю, сообщаемому участниками, выбрать *одну* из альтернатив "наиболее отвечающую" в каком-либо смысле интересам участников. Напротив, задача в форме представительной демократии означает необходимость "агрегировать предпочтения": упорядочить ВСЕ имеющиеся альтернативы, то есть построить полное коллективное предпочтение на множестве альтернатив. Подразумевается, что не все из потенциально возможных в мире альтернатив A могут оказаться доступными, но предпочтение-список (какая альтернатива лучше какой или эквивалентна какой для сообщества) будет вручен представителю сообщества, который и будет по нему выбирать из наличных альтернатив. Таковы выборы депутатов в законодательные органы: избиратели не знают заранее, какие именно законы предстоит принимать депутату. Я стараюсь выбрать депутата, близкого мне по предпочтениям в общественных вопросах, этот депутат и является "общественным предпочтением".

Например, группа друзей: Анна, Борис, Виктор, Григорий — решает вопрос о (едином для всех) использовании свободного вечера и имеет профиль предпочтений вида Танцы $\succ_A$ Бар $\succ_A$ Кино, Кино $\succ_B$ Танцы $\succ_B$ Бар ..., удобнее представляемый таблицей (поставленная ниже альтернатива меньше ценится):

Тогда некоторое правило голосования, дающее одну альтернативу, решало бы проблему типа прямой демократии, а правило (возможно, такое же) дающее полное упорядочение — проблему представительной демократии. Скажем, правило "турнира Кондорсе", иначе называемого "простым большинством", состоит в том, что каждая альтернатива голосуется против каждой, и побеждающие альтернативы ставятся выше побежденных в "коллективном предпочтении", наивысшая же называется "победителем по Кондорсе". Если мы нашли только победителя, то решили задачу прямой демократии, а если добились упорядочения всех альтернатив — то и задачу представительной. На некоторых профилях, однако, ни полного непротиворечивого (транзитивного) упорядочения (в том числе, допускается эквивалентность элементов), ни даже победителя Кондорсе не возникает. Так и в данном случае, окажется, что альтернатива Бар эквивалентна альтернативе Танцы, которая эквивалентна Кино, но Бар предпочтительнее, чем Кино — противоречие (Б$\sim$Т $\sim$К, Б$\succ$К). Поэтому правило Кондорсе для подведения общего мнения здесь неудачно. Напротив, метод де Борда подсчета очков (2 за первое место, 1 за второе, 0 за третье в чьем-либо бюллетене) дает здесь (и везде, как легко догадаться) транзитивное упорядочение: Т$=9 \succ$ К$=8 \succ$ Б$=7$ (победят Танцы). То же можно сказать и о его наиболее распространенной в мире вариации, когда очки (1 очко) присуждаются только за первое место в бюллетене: одного оставить, остальных вычеркнуть. Этот метод (правило относительного большинства) даст Бар=2, Танцы=1, Кино=1 (победит Бар). Очевидно, разные методы дают разные результаты.

Естественный вопрос: какие из методов группового выбора считать "лучшими" в каком-либо смысле? Вслед за Кеннетом Эрроу, теоретики группового выбора признают довольно существенными желаемыми свойствами того или иного правила агрегирования предпочтений следующие (сформулируем их для задачи "представительной демократии"):

1. Универсальность: на любом рациональном (полном, транзитивном) профиле предпочтений правило должно давать рациональный результат.

2. Парето-эффективность (соответствие единогласию): если все участники считают одну альтернативу лучше другой, то правило не должно этому противоречить.

3. Анонимность: все выборщики должны быть в равном положении, то есть перенумерация (переименование) участников не должна изменять результат.

4. Нейтральность: все альтернативы должны быть в равном положении, то есть их перенумерация (переименование) не должна изменять результат.

5. Независимость от посторонних альтернатив: если при одном профиле предпочтений правило ставило одну альтернативу выше другой ($a_1 \succ a_2$), то это соотношение должно сохраниться и при новом профиле, где мнения участников об относительной предпочтительности между (a_1, a_2) не изменились, а изменились относительно других альтернатив. Аналогично для случая ($a_1 \sim a_2$).

Для "Прямой демократии" требования к правилу такие же, за исключением модификации пунктов 1 и 5. А именно, требование пункта 1 ослабляется: достаточно хотя бы получать победителя, а требование 5 модифицируется: требуется "**неманипулируемость** правила ложными сообщениями". Подразумевается, что указав ложно свое предпочтение в бюллетене, выборщик не должен иметь шанса улучшить для себя результат голосования. Оказывается, это свойство очень близко к свойству независимости от посторонних альтернатив, что можно понять на примерах разных правил. Например, правило Кондорсе удовлетворяет и "независимости" и "неманипулируемости", а правило Борда нарушает и то и другое.

Главный результат, касающийся этих свойств — теорема Эрроу "о диктаторе". Она показывает, что эти требования несовместные: нельзя придумать удовлетворяющего им всем правила подведения общего мнения. Более того, если единственным правилом удовлетворяющим 1,2,4,5 является диктаторское правило, приписывающее общественному предпочтению значение предпочтения одного из участников (нарушение анонимности в крайней форме).

Аналогичная теорема Гиббарда-Саттертуэйта о методах прямой демократии показывает несовместность требований 1-5 в формулировках соответствующих этой постановке задачи.

Итак, выбирая метод для применения в некоторой области решений, придется пожертвовать каким-либо из желаемых свойств метода. Рассмотрим примеры отказа от того или иного свойства, начав с последнего - независимости. Именно этим путем идут конституции большинства стран, устанавливая наиболее популярное правило - относительное большинство (в бюллетене указывается только наиболее желательный кандидат). Оно нарушает требования независимости и неманипулируемости. Действительно, если я более всего предпочитаю кандидата A, но считаю, что шансы победить есть только у B и C, среди которых B мне предпочтительнее, то его (B) я и укажу в бюллетене, ложно проявив свое предпочтение и улучшив, возможно, его позицию.

Случай, когда некоторое сообщество предпочитает отказаться от свойства 4 (нейтральности) тоже достаточно типичен: в голосованиях о поправках к конституции в большинстве парламентов текущий вариант конституции (статус-кво) обладает преимуществом по сравнению с новшествами: нужно не менее 2/3 голосов, чтобы его изменить. Оказывается, именно 2/3 достаточно, чтобы правило большинства не давало циклов (было транзитивно), то есть процесс переголосований нормально заканчивался.

Отказ от свойства 3 (анонимности) в наиболее резкой форме наблюдается в "диктаторском" правиле выбора: назначается участник, чье мнение и объявляется мнением коллектива. Дополнительно, можно назначить другого участника решать среди альтернатив, безразличных первому, и т. д. Удивительным является результат теоремы Эрроу: только это правило удовлетворяет остальным четырем требованиям. Пример сообществ охотно идущих на такое решение можно встретить в семьях: решает глава семьи.

Отказ от свойства 2 можно реализовать бросанием жребия: предпочтительнее альтернатива, получившая больше очков. Очевидно, это правило удовлетворяет всем требованиям, кроме (2), но трудно назвать сообщество, согласное с этим вариантом.

Последнее и наиболее интересное: в каких случаях уместно пренебречь требованием 1 — универсальностью метода? Например, выбор всего из двух альтернатив страхует нас от возникновения нетранзитивного (противоречивого) результата голосования. Тогда применим метод Кондорсе, обладающий всеми достоинствами, кроме универсальности. Но оказывается, есть и более широкий класс ситуаций, где его можно применять не опасаясь нетранзитивного исхода голосования — *однопиковые предпочтения.*

Определение. Профиль предпочтений называется *однопиковым*, если все альтернативы можно упорядочить на прямой таким образом, что каждый участник i обнаружит нестрого монотонное убывание своего предпочтения как влево от своей наиболее предпочитаемой альтернативы a_i^*, так и вправо. Можно проверить, что предпочтения в примере Бар-Кино-Танцы, приведенном выше, не обладают этим свойством. Иначе правило Кондорсе давало бы в этом примере транзитивное упорядочение, как показывает следующая теорема.