

# Механизм принятия решений: максимизация прибыли

## 1. Критерии качества функционирования фирмы

### 1.1. Критерий максимизации прибыли

Основным критерием качества функционирования фирмы является критерий максимизации прибыли

$$\pi(q) \rightarrow \max_q. \quad (1)$$

Здесь  $\pi(q)$  - прибыль, полученная фирмой при производстве продукции в объеме  $q$ . Прибыль можно также представить в виде разницы суммарной выручки  $TR(q)$  и суммарных издержек  $TC(q)$ :

$$TR(q) - TC(q) \rightarrow \max_q. \quad (2)$$

В соответствии с этим критерием действует подавляющее большинство производственных организаций. Большая часть остальных критериев являются частными случаями приведенного.

### 1.2. Критерий максимизации выручки

Фирмы, максимизирующие свою выручку, также довольно часто встречаются на рынке. Как правило, критерием максимизации выручки пользуются фирмы, производящие товары или услуги с очень высокими постоянными и очень низкими переменными издержками. Примером здесь могут служить софтверные фирмы, производящие программное обеспечение, а также фирмы, организующие концерты или спортивные мероприятия. Действительно, на разработку программного продукта необходимо затратить немалые средства, но его тиражирование (при современной цене CD-R) не стоит почти ничего. Аналогично, довольно большие постоянные издержки несут организаторы концертов (гонорар, аренда зала, реклама и т.д.). Но издержки практически не отличаются для случая полупустого зала и аншлага.

Таким образом, увеличение объема производства практически не ведет к увеличению издержек, то есть можно считать, что

$$TC(q) = \text{const},$$

и критерий (2) принимает вид

$$TR(q) \rightarrow \max_q.$$

### **1.3. Критерий минимизации издержек**

Этот случай возникает, когда постоянной можно считать выручку. Скажем, фирма получила заказ на производство определенного количества продукции, и это количество необходимо произвести с минимальными издержками. При этом стратегической переменной является уже не количество продукции (оно постоянно), а способ производства (одно и то же количество продукции можно произвести с использованием различных производственных факторов). Например, можно использовать ручной труд, механизированный труд или полностью автоматическую производственную линию. Критерий выглядит следующим образом:

$$TC \rightarrow \min.$$

### **1.4. Другие критерии**

Другие критерии часто также могут сводиться к исходному критерию максимизации прибыли при наложении дополнительных ограничений на цену продукции, на объем производства, на способ производства (в частности, сюда можно отнести свертку “экологических” критериев - это всё равно будет максимизация прибыли, но при достаточно жестких ограничениях на объемы выбросов вредных веществ. В издержки здесь, в частности, будет включена стоимость очистных сооружений).

Таким образом, при рассмотрении задачи оптимизации работы фирмы практически всегда мы можем пользоваться критерием (1) или (2) при некоторых дополнительных ограничениях.

## **2. Максимизация прибыли в условиях совершенной конкуренции**

### **2.1. Постановка задачи**

На рынке совершенной конкуренции фирма-производитель является ценополучателем - он ориентируется на цену продукции, установившуюся на рынке. При этом цена никак не изменяется в зависимости от объема предложенной продукции. Действительно, на рынке совершенной конкуренции действует огромное количество поставщиков, и каждый из них занимает ничтожную долю в общем объеме продаж.

Каждый из поставщиков может продать по цене, установившейся на рынке, любое количество продукции, которое в состоянии произвести

(такая ситуация действительно реальна - можно, например, вдвое увеличить объем продаж, увеличив вдвое число торговых точек). Таким образом, занижать цену относительно установившейся на рынке производителю невыгодно (он просто получит меньшую выручку). В то же время, устанавливая более высокую цену производитель тем более не может (этим он потеряет рынок - покупатели будут приобретать продукцию у конкурентов).

Запишем суммарную выручку в виде произведения цены на объем продаж. Критерий (2) в этом случае примет вид

$$pq - TC(q) \rightarrow \max_q .$$

Для нахождения точки максимума данного критерия продифференцируем его по объему продаж. Получим:

$$p = TC'(q) = MC(q). \quad (3)$$

Таким образом, условие оптимальности объема производства состоит в том, что предельные издержки должны совпадать с ценой (мы увеличиваем объем производства до тех пор, пока издержки на производство новой единицы продукции не станут выше цены).

## 2.2. Идентификация функции издержек

Наибольшую сложность при решении поставленной задачи представляет идентификация функции издержек. В некоторых случаях представляется возможным вычислить функцию издержек аналитически. В постоянные издержки (не зависящие от объема производства) будут, в частности, входить покупка или аренда земельного участка, постройка завода, покупка производственных мощностей, зарплата управленческому персоналу, налоги, рассчитываемые по постоянной базе. В переменные издержки (зависящие от объема производства) включим затраты на сырье, зарплату рабочих с начислениями, транспортные расходы, налоги, рассчитываемые по переменной базе, в частности, налог на прибыль.

Однако даже в этом случае останется некоторая случайная составляющая. Кроме того, достаточно сложно оценить издержки, возникающие при предельно высоких для данного размера предприятия объемах производства. А именно при них, как правило, достигается максимальная прибыль фирмы в условиях совершенной конкуренции.

Действительно, при небольших объемах производства обычно сокращаются не только средние (что очевидно, поскольку постоянные издержки раскладываются на большее число единиц произведенной продукции), но и предельные издержки - появляется положительный эффект от специализации рабочих, при оптовых покупках дешевле оказывается сырье и т.д. Поэтому выгодным оказывается наращивать объемы производства. Отрицательный эффект масштаба проявляется, когда начинает сказываться недостаток производственных мощностей. И именно на этом участке достигается равенство (3).

Если в наличии имеется достаточная выборочная информация, можно попытаться оценить функцию издержек статистическими методами. Выборочная информация может содержать данные по объемам производства и суммарным издержкам по нескольким заводам (если у фирмы есть несколько однотипных заводов) или за несколько месяцев. При этом для получения значимых результатов объем выборки должен составлять минимум несколько десятков наблюдений. Кроме того, нужно постараться нивелировать все факторы, влияющие на издержки и не связанные с объемом производства. Например, если за время наблюдений существенно изменялись цены (случай высокой инфляции или длительных временных рядов), необходимо привести величину издержек к одному уровню цен, скорректировав их на индекс цен.

### **2.3. Применение для оценки коэффициентов регрессии метода наименьших квадратов**

Пусть имеются данные по объемам продаж  $x_i$  и по соответствующим им суммарным издержкам  $y_i, i = 1, \dots, n$ . Можно рассмотреть регрессионную модель

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 (x_i)^2 + \varepsilon_i. \quad (4)$$

Здесь необходима минимум квадратичная модель, поскольку для линейной модели выполняется свойство постоянства предельных издержек. При высоких предельных издержках (выше цен) оптимум достигается при нулевом объеме производства (каждая дополнительная единица продукции увеличивает убытки), а при низких предельных издержках (ниже цены) оптимум достигается при бесконечном объеме производства (каждая дополнительная единица продукции увеличивает прибыль). Это никак не

согласуется с реальной жизнью. Квадратичная модель уже позволяет учесть возрастание предельных издержек.

Если считать остатки  $\varepsilon_i$  взаимно некоррелированными ( $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ ) и гомоскедастичными (с постоянной дисперсией  $M\varepsilon_i^2 = \sigma^2$ ), то для определения оценок коэффициентов  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  можно использовать метод наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \theta_0 - \theta_1 x_i - \theta_2 (x_i)^2 \right)^2 \rightarrow \min_{\theta_0, \theta_1, \theta_2} .$$

МНК-оценки вычисляются по формуле

$$\hat{\Theta} = \left( X^T X \right)^{-1} X^T Y .$$

Здесь, в контексте данной модели,  $X$  - матрица размерности  $n \times 3$ , столбец  $x^{(0)}$  которой состоит из единиц, столбец  $x^{(1)}$  состоит из наблюдений  $x_i$ , а столбец  $x^{(2)}$  состоит из величин  $x_i^2$ .

#### 2.4. Проверка гипотезы о значимости оценок коэффициентов

Получив оценки коэффициентов  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , можно проверить, насколько они значимы. Для этого необходимо произвести следующие действия:

1) Вычислим несмещенную оценку дисперсии ошибок (в данном случае  $p = 2$ )

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n - p - 1} \sum_{i=1}^n \left( y_i - \hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_1 x_i^{(1)} - \dots - \hat{\theta}_p x_i^{(p)} \right)^2$$

2) Вычислим среднеквадратическую ошибку  $s_k$  в оценивании коэффициентов  $\theta_k$ ,  $k = 0, \dots, p$

$$s_k = \hat{\sigma} \left( \left( X^T X \right)^{-1} \right)_{kk} .$$

3) Выберем величину уровня значимости - вероятности отвергнуть истинную гипотезу. Например,  $\alpha = 0,05$ .

4) Найдем эмпирическое значение критерия

$$t_{\text{эмп}} = \hat{\theta}_k / s_k .$$

5) Найдем критическое значение критерия с помощью таблицы распределения Стьюдента

$$t_{\text{крит}} = t_{\alpha}(n - p - 1).$$

б) Если  $|t_{\text{эмп}}| > t_{\text{крит}}$ , то гипотеза  $H_0: \theta_k = 0$  отвергается при уровне значимости  $\alpha$ . Это означает, что истинное значение коэффициента  $\theta_k$  значимо отличается от нуля.

Пункты 4-6 необходимо выполнить для  $k = 0, \dots, p$ .

Для того, чтобы построенной модели (4) можно было доверять, необходимо, как минимум, чтобы коэффициенты  $\theta_1$  и  $\theta_2$  значимо отличались от нуля. Близость к нулю коэффициента  $\theta_0$  означает незначительность или даже полное отсутствие постоянных издержек.

### 3. Максимизация прибыли в условиях монополии

#### 3.1. Отличия от случая совершенной конкуренции

Случай монополии отличается от случая совершенной конкуренции в первую очередь тем, что монополист властен над ценой. Если монополист хочет продать небольшое количество продукции, он может поднять цену до высокого уровня. Если же ему требуется продать большой объем товара, он вынужден снижать цену. Действительно, монополист покрывает весь рыночный спрос, и цена устанавливается, исходя из закона спроса

$$p = D^{-1}(q).$$

Здесь  $D^{-1}(q)$  - функция “цена потребителя”, максимальная цена по которой потребитель купит весь предложенный на рынок объем товара  $q$ . Иными словами, это цена, выраженная через количество товара из закона спроса

$$q = D(p).$$

Выручку, аналогично случаю конкурентного производителя, представим как произведение цены и объема продаж:

$$TR(q) = D^{-1}(q)q.$$

Условие максимизации прибыли для случая монополии можно переписать следующим образом:

$$TR'(q) = TC'(q).$$

Иначе говоря, для оптимального объема производства предельная выручка равняется предельным издержкам:

$$MR(q) = MC(q).$$

То есть производитель будет наращивать производство, пока новая единица продукции приносит ему доходов больше, чем составляют издержки на ее производство.

### 3.2. Идентификация функции спроса

Как и в случае конкурентного производителя, существенной проблемой здесь является идентификация функции издержек. Она решается так же, как и раньше. Новой сложностью является идентификация функции спроса. Единственным способом ее решения снова представляется оценка на основе статистики за предыдущие периоды времени. В простейшем случае объем спроса на данную продукцию примем зависимым только от ее цены. В частности, зависимость может быть линейной:

$$q_i = a - bp_i + \varepsilon_i.$$

Здесь  $p_i$  и  $q_i$  - имеющиеся в наличии данные по ценам и объемам продаж за предыдущие периоды времени (сутки, недели, месяцы и т.д.).

С помощью метода наименьших квадратов можно отыскать оценки коэффициентов функции спроса  $a$  и  $b$ , а также проверить их значимость. Имеются также статистические методы проверки адекватности функции регрессии имеющимся данным.

Предположение о независимости объема спроса от прочих факторов является достаточно сильным. Действительно, на спрос будут влиять любые изменения на рынке: колебания цен конкурентов, изменения в доходах населения, проведенная рекламная кампания и т.д. Учесть всё не представляется возможным - недостаточным окажется объем выборки. Поэтому желательным является использование данных, собранных в сходных условиях, чтобы фактором, значимо воздействующим на спрос, была только цена.

Изменения цен на другие товары можно частично нивелировать приведением цены к одному уровню с помощью индекса цен. Например, осенью 1998 года спрос на товар, выросший в цене на 10, 20 или 30

процентов, мог вырасти, поскольку цены в целом выросли гораздо сильнее, и данный товар стал относительно дешевле.

### **3.3. Ценовая дискриминация**

Иногда у монополиста появляется возможность еще сильнее увеличить свои прибыли, продавая товар различным покупателям по разным ценам.

**Ценовая дискриминация первой степени** (совершенная ценовая дискриминация) возникает, когда каждому покупателю товар продается по максимальной цене, которую тот готов заплатить. Таким образом монополист получает весь потребительский избыток. Совершенная ценовая дискриминация - крайне редкое явление. Однако некоторым приближением к этому случаю можно считать восточный базар, закрытый аукцион и рынки некоторых видов услуг, в частности, юридических.

**Ценовую дискриминацию второй степени** отличает свобода выбора потребителем условий продажи. Существует ценовая дискриминация следующих видов:

**1) По объему потребления** (различие крупнооптовых, мелкооптовых и розничных цен; карточки в метро).

**2) По категориям товара и/или условиям продажи** (авиаперевозки первым и экономическим классом; билеты туда-и-обратно; предварительная продажа; покупка товара по купонам скидок).

**3) По времени** (междугородние телефонные разговоры по выходным; ночной интернет).

К ценовой дискриминации второй степени можно отнести “политику снятия сливок”, когда производитель предлагает новый товар по очень высокой цене (например, производители процессоров изначально делают их очень дорогими, но существенно снижают цены после появления нового процессора с большей тактовой частотой).

**Ценовая дискриминация третьей степени** отличается жестким разделением рынка на отдельные сегменты с различной ценовой эластичностью спроса. Переход потребителей из одного сегмента в другой невозможен. Примером здесь могут служить различные цены на билеты в музей для взрослых, детей и иностранцев; различные цены на лицензионные программные продукты в разных странах, а также различные скидки - студентам, постоянным клиентам.



Делу увеличения прибыли монополиста служит и еще один вид ценовой политики - “двойной тариф”. Это ситуация, когда потребитель платит дважды - за возможность приобрести благо и за само благо. Двойной тариф часто используется индустрией развлечений - за вход в парк или в ночной клуб взимается плата, после чего потребитель платит еще раз - за аттракционы или за напитки. Двойной тариф стимулирует потребителя покупать благо в большем объеме.

## 4. Максимизация прибыли в условиях неопределенности

### 4.1. Постановка задачи

Часто прибыль производителя сильно зависит от внешних факторов, которые он не в состоянии контролировать. Изначально непонятно, благоприятной ли будет конъюнктура рынка, появятся ли конкуренты, какой окажется налоговая система через несколько лет. Поэтому анализируя эффективность инвестиционных проектов, инвестор действует в условиях неопределенности.

Пусть инвестор анализирует эффективность  $m$  инвестиционных проектов. При этом возможна реализация любого из  $n$  вариантов состояния конъюнктуры рынка. В платежной матрице записаны величины  $x_{ij}$  - прибыли (чистые приведенные стоимости), полученные инвестором в случае реализации  $i$ -проекта при  $j$ -состоянии среды. Платежная матрица имеет следующий вид:

	Среда 1	Среда 2	...	Среда $n$
Проект 1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$
Проект 2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2n}$
...	...	...	...	...
Проект $m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$

### 4.2. Виды критериев

Существуют различные виды критериев принятия решений в условиях неопределенности. Перечислим главные из них.

**1) Критерий Вальда (крайнего пессимизма)** применяется в случае агрессивной среды (военные действия, жесткая конкуренция и т.д.).

Считается, что при любых действиях среда отвечает наихудшим образом. Инвестор выбирает проект, дающий наибольший гарантированный результат:

$$\min_{j=1,\dots,n} x_{ij} \rightarrow \max_{i=1,\dots,m}$$

	Среда 1	Среда 2	Среда 3	Среда 4	Результат
Проект 1	3	1	5	4	1
Проект 2	6	6	2	0	2
Проект 3	4	2	7	6	2
<b>Проект 4</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>3</b>

**2) Критерий крайнего оптимизма** применяется достаточно редко. Считается, что при любых действиях среда отвечает наилучшим образом. Инвестор выбирает проект, дающий результат, наилучший из всех возможных:

$$\max_{j=1,\dots,n} x_{ij} \rightarrow \max_{i=1,\dots,m}$$

	Среда 1	Среда 2	Среда 3	Среда 4	Результат
Проект 1	3	1	5	4	5
Проект 2	6	6	2	0	6
<b>Проект 3</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
Проект 4	5	3	5	5	5

**3) Критерий Гурвица** является средневзвешенным из критериев крайнего пессимизма и крайнего оптимизма с вероятностями  $\alpha$  и  $(1-\alpha)$ . Повышение величины  $\alpha$  означает увеличение вероятности наихудшей реакции среды. Часто значение  $\alpha$  принимается равным 0,5. Критерий выглядит следующим образом:

$$\alpha \min_{j=1,\dots,n} x_{ij} + (1-\alpha) \max_{j=1,\dots,n} x_{ij} \rightarrow \max_{i=1,\dots,m}$$

	Среда 1	Среда 2	Среда 3	Среда 4	Результат
Проект 1	3	1	5	4	3
Проект 2	6	6	2	0	3
<b>Проект 3</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>4.5</b>
Проект 4	5	3	5	5	4

**4) Критерий математического ожидания** дает наиболее взвешенный результат. Он используется, когда есть возможность получить информацию об априорной вероятности  $p_j$  реализации каждого из

состояний среды. Это, в частности, может быть экспертная оценка, либо статистическая информация о частотах реализации состояний среды за предыдущие периоды времени. В некоторых случаях даже принятие предположения о равновероятности реализации всех состояний среды ( $p_j = 1/n$ ), что соответствует критерию Лапласа, оказывается лучшим вариантом, чем использование критерия Вальда, крайнего оптимизма или Гурвица. Именно этот вариант

$$\sum_{j=1}^n p_j x_{ij} \rightarrow \max_{i=1, \dots, m} .$$

	Среда 1	Среда 2	Среда 3	Среда 4	Результат
Проект 1	3	1	5	4	13/4
Проект 2	6	6	2	0	14/4
<b>Проект 3</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>19/4</b>
Проект 4	5	3	5	5	18/4

5) Принципиально по-другому принимается решение на основе **критерия Сэвиджа (минимаксного сожаления)**. На основе исходной платежной матрицы формируется матрица сожалений R - недополученных прибылей, если инвестор реализует  $i$ -проект, и при этом реализуется  $j$ -состояние среды. Каждый элемент матрицы сожалений вычисляется по формуле

$$r_{ij} = \max_{i=1, \dots, m} x_{ij} - x_{ij} .$$

Критерий Сэвиджа выписывается следующим образом:

$$\max_{j=1, \dots, n} x_{ij} \rightarrow \min_{i=1, \dots, m} .$$

	Среда 1	Среда 2	Среда 3	Среда 4	Результат
Проект 1	3	5	2	2	5
Проект 2	0	0	5	6	6
Проект 3	2	4	0	0	4
<b>Проект 4</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>

## Литература

1. Айвазян, Мхитарян “Прикладная статистика и основы эконометрики”, М.: “Юнити”, 1998.
2. МакКоннелл, Брю “Экономикс”, М.: “Республика”, 1992.
3. Пиндайк, Рубинфельд “Микроэкономика”, М.: “Дело”, 2000.
4. Вэриан “Микроэкономика. Промежуточный уровень”, М.: “Юнити”, 1997.

## Содержание

<b>1. Критерии качества функционирования фирмы.....</b>	<b>1</b>
1.1. Критерий максимизации прибыли.....	1
1.2. Критерий максимизации выручки.....	1
1.3. Критерий минимизации издержек.....	2
1.4. Другие критерии.....	2
<b>2. Максимизация прибыли в условиях совершенной конкуренции.....</b>	<b>2</b>
2.1. Постановка задачи.....	2
2.2. Идентификация функции издержек.....	3
2.3. Применение для оценки коэффициентов регрессии.....	4
метода наименьших квадратов	
2.4. Проверка гипотезы о значимости оценок коэффициентов.....	5
<b>3. Максимизация прибыли в условиях монополии.....</b>	<b>6</b>
3.1. Отличия от случая совершенной конкуренции.....	6
3.2. Идентификация функции спроса.....	7
3.3. Ценовая дискриминация.....	8
<b>4. Максимизация прибыли в условиях неопределенности.....</b>	<b>9</b>
4.1. Постановка задачи.....	9
4.2. Виды критериев.....	9
<b>Литература.....</b>	<b>12</b>
<b>Содержание.....</b>	<b>13</b>