Федеральное агентство по образованию

Иркутский государственный университет

А. Ю. Филатов

Задачи иркутских олимпиад по математической экономике 2007–2009 годов с решениями

Сборник задач

Рекомендовано Иркутским региональным отделением Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов математических и экономико-математических специальностей университетов

Иркутск 2009

УДК 330.4

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: Зоркальцев В. И.
(зав. отделом прикладной математики ИСЭМ СО РАН, проф. ИГУ),
Савватеев А. В.
(старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН, проф. РЭШ),
Попов В. В.
(зав. кафедрой экономической теории АГУ)

Филатов А. Ю. Задачи иркутских олимпиад по математической экономике 2007–2009 годов с решениями: сб. задач / А. Ю. Филатов. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2009. – 32 с.

Третий по счету авторский сборник А. Ю. Филатова составлен из заданий, предложенных на городских и региональных олимпиадах школьников и студентов по математической экономике в 2007–2009 годах. Он содержит задачи из областей микро- и макроэкономики, теории отраслевых рынков и других разделов математической экономики. Задачи сопровождаются решениями. Более сложные задачи отмечены звездочкой, наиболее трудные и требующие специальной подготовки – двумя звездочками.

Предназначен для преподавателей экономики средних общеобразовательных школ, средних специальных учебных заведений и вузов. Также будет полезен старшеклассникам, студентам и аспирантам, изучающим курсы по микро- и макроэкономике.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Александр Юрьевич Филатов,
e-mail: fial@irlan.ru, ICQ 10793366

Другие авторские разработки в области математической экономики выложены на сайтах:
http://polnolunie.baikal.ru/me/mat_ec.htm
http://matec.isu.ru
http://fial_.livejournal.com

Подготовила к печати Г. А. Никифорова
Макет: А. Ю. Филатов

Темплан 2009. Поз. 29.
Подписано в печать 10.08.2009. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая белая. Печать трафаретная. Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 300 экз.

Издательство Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бул. Гагарина, 36

1. Спрос и предложение

Задача 1

Пусть p – цена (в тыс. руб.), а q – объем продаж (в тыс. шт.). Среди следующих зависимостей найти функции спроса и предложения. Объяснить.

1. $q = 20 - 2p$.
2. $q = -5 - 2p$.
3. $q = p^2 - 2p$.
4. $p = \sqrt{q + 25}$.

Решение:

Функция спроса является убывающей (при повышении цены количество сокращается), а предложения – возрастающей (при повышении цены количество также увеличивается). Кроме того, должны быть положительные значения цены, при которых объем продаж положителен.

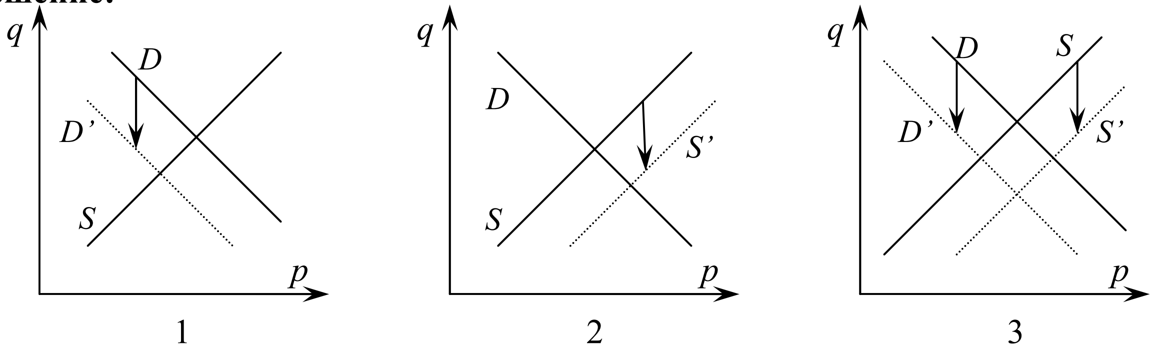
1. $q = 20 - 2p$ – линейная убывающая функция спроса.
2. $q = -5 - 2p$ – поскольку при любых положительных ценах объем продаж всегда меньше нуля, функция не является ни спросом, ни предложением.
3. $q = p^2 - 2p$ – при $p > 2$ возрастающая функция предложения.
4. $p = \sqrt{q + 25}$, $q = p^2 - 25$ – при $p > 5$ возрастающая функция предложения.

Задача 2

Проанализируйте влияние описанных ниже событий на рынок компьютеров. Укажите, как изменится равновесная цена и объем продаж. Проиллюстрируйте произошедшие изменения с помощью графиков.

1. В результате экономического кризиса сократились доходы населения;
2. Разорилась часть фирм, занимающихся продажей компьютеров;
3. Оба вышеперечисленных события произошли одновременно.

Решение:

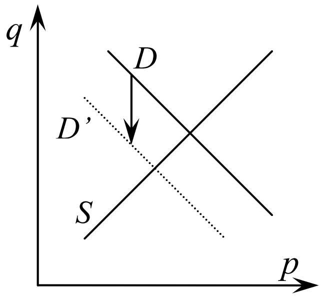


1. Поскольку компьютеры принадлежат к числу нормальных товаров, сокращение доходов приводит к уменьшению спроса. **Уменьшаются цена и объем продаж.**
2. Разорение части фирм приводит к сокращению предложения. **Уменьшается объем продаж, цена при этом увеличивается.**
3. Одновременное сокращение спроса (из-за падения доходов) и предложения (из-за разорения фирм) приводит к существенному **уменьшению объема продаж**, **цена при этом может незначительно вырасти или упасть**, однако утверждать что-то однозначно здесь нельзя.

Задача 3

Конкурент понизил цену на свою продукцию. В результате этого цена и объем продаж нашей продукции изменились на 20%. Что произошло с выручкой?

Решение:



Конкурент, понизив цену, привлек часть наших покупателей. Соответственно, спрос на нашу продукцию сократился. Следовательно, и равновесная цена, и равновесный объем сократились на 20%: $p_2 = 0{,}8p_1$, $q_2 = 0{,}8q_1$, а выручка стала равной $TR_2 = 0{,}8p_1 * 0{,}8q_1 = 0{,}64p_1q_1 = 0{,}64TR_1$, т. е. **уменьшилась на 36%**.

Задача 4

Торговая сеть «Атлантида» устраивает акцию: приобретая в определенные сроки любой товар, покупатель получает купоны на сумму 30% от его стоимости. Этими купонами можно в следующем периоде оплатить до 20% суммы следующих покупок. Каков реальный размер скидки?

Решение:

Приобретая товар на сумму x, покупатель получает купоны на сумму $0{,}3x$. Купонами можно оплатить одну пятую часть новых покупок, т. е. их максимальная стоимость составит $5*0{,}3x = 1{,}5x$. Таким образом, при покупке товаров на сумму $x+1{,}5x = 2{,}5x$ покупатель экономит $0{,}3x$. Размер скидки равен $0{,}3x/2{,}5x = 0{,}12$ = **12%**.

Задача 5

Суточный спрос на чипсы задан функцией $q_D = 270 - 6p$. Сколько упаковок будет куплено по цене 30 руб.? По какой цене чипсы перестанут покупать? При какой цене магазин получит максимальную выручку? Будет ли при этом максимальна прибыль? Что можно посоветовать в этой ситуации производителю?

Решение:

По цене 30 руб. будет куплено 270 – 6*30 = **90 упаковок**.

Чипсы перестанут покупать, когда спрос обратится в ноль: $270 - 6p = 0$, p = **45 руб**.

Выпишем функцию выручки: $TR = pq = p(270 - 6p) = 270p - 6p^2$, максимизируем ее, найдя вершину параболы: $p = 270/12 =$ **22,5 руб.**

Прибыль при этом **не будет максимальна**, поскольку прибыль равна разнице выручки и издержек, а издержки возрастают с ростом производства. Производителю можно посоветовать в этой ситуации **повысить цены**.

Задача 6

Пусть p – цена сноуборда (в тыс. руб.), q – объем продаж (в шт.). Июльский спрос задан соотношением $p = 8 - 0{,}01q$. В декабре он утроился. Определить декабрьский спрос на сноуборды.

Решение:

Необходимо обратить внимание, что утраиваются объемы продаж, а не цены, поэтому сначала надо переписать функцию спроса $q = (8 - p)/0{,}01 = 800 - 100p$, а затем умножить ее на 3. Получим **декабрьский спрос:** $\boldsymbol{q = 2400 - 300p}$.

Задача 7

Суточный спрос на сахар в некотором магазине задан функцией $q_D = 2200 - 75p$, а предложение – функцией $q_S = p^2 - 176$. Здесь p – цена, руб., а q – объем продаж, кг. Найти равновесную цену и объем продаж. Как они изменятся, если после закрытия соседнего магазина спрос вырастет вдвое?

Решение:

Приравняем функции спроса и предложения и найдем точку равновесия:

$$2200 - 75p = p^2 - 176, \quad p^2 + 75p - 2376 = 0, \quad D = 5625 + 4*2376 = 15\,129 = 123^2,$$

$$p^* = (-75 + 123)/2 = 24, \quad q^* = 24^2 - 176 = 400.$$

После увеличения спроса вдвое он станет равен $q_D = 2(2200 - 75p) = 4400 - 150p$.

$$4400 - 150p = p^2 - 176, \quad p^2 + 150p - 4576 = 0, \quad D = 22\,500 + 4*4576 = 40\,804 = 202^2,$$

$$p^* = (-150 + 202)/2 = 26, \quad q^* = 26^2 - 176 = 500.$$

Таким образом, цена сахара вырастет **с 24 до 26 руб.**, а объем продаж – **с 400 до 500 кг**.

Задача 8*

Спрос на пиво задан функцией $q_D = 390 - 13p$, где p – цена (в руб.), а q – объем продаж (в тыс. бут.). Фирма производит его в количестве $q_S = 20p - 270$. Как и насколько изменится равновесный объем продаж и равновесная цена, если государство примет решение взимать с производителей дополнительный налог 15% с выручки?

Решение:

Найдем точку равновесия в исходной ситуации, приравняв спрос и предложение:

$$390 - 13p = 20p - 270, \quad 33p = 660, \quad p^* = 20, \quad q^* = 390 - 13*20 = 130.$$

После введения налога фирма получит 85% от стоимости продукции, следовательно, функция предложения станет иметь вид $q_S = 20*0{,}85p - 270 = 17p - 270$.

$$390 - 13p = 17p - 270, \quad 30p = 660, \quad p^* = 22, \quad q^* = 390 - 13*22 = 104.$$

Таким образом, **цена повысится с 20 до 22 руб.**, а **объем продаж сократится со 130 до 104 тыс. бутылок**.

Задача 9**

Спрос и предложение на рынке сахара в Иркутске представлены соответственно функциями $q_D^1 = 1700 - 40p$ и $q_S^1 = 20p - 400$, а в Улан-Удэ – $q_D^2 = 1050 - 30p$ и $q_S^2 = 10p - 150$. Здесь p – цена, руб./кг, q – месячный объем продаж в тоннах.

1. Найти равновесные цены и объемы продаж сахара в каждом городе.
2. Найти равновесную цену и объем продаж в каждом городе, если возможна бесплатная транспортировка сахара из города в город. Указать объем перевозки.
3. Что произойдет, если перевозка каждого килограмма сахара между городами будет обходиться продавцу в 2,5 руб.?

Решение:

1. Найдем равновесную точку для каждого города, приравняв спрос и предложение:

$$1700 - 40p = 20p - 400, \quad 60p = 2100, \quad p^1 = \mathbf{35\ руб.}, \quad q^1 = 20*35 - 400 = \mathbf{300\ т.}$$

$$1050 - 30p = 10p - 150, \quad 40p = 1200, \quad p^2 = \mathbf{30\ руб.}, \quad q^2 = 10*30 - 150 = \mathbf{150\ т.}$$

2. При бесплатной транспортировке два рынка превращаются в один с едиными ценами. Приравняем суммарный спрос и суммарное предложение:
   $$(1700-40p)+(1050-30p)=(20p-400)+(10p-150),$$
   $$2750-70p=30p-550,\ 100p=3300,\ p^*=\mathbf{33\ руб.}$$
   При такой цене иркутский спрос составит $q_D^1=1700-40*33=380$ т, а иркутское предложение $q_S^1=20*33-400=260$ т. Дефицит в 380 – 260 = 120 т будет компенсирован улан-удэнским сахаром. Действительно, спрос в Улан-Удэ равен $q_D^2=1050-30*33=60$ т, а предложение $q_S^2=10*33-150=180$ т. Следовательно, **объем перевозок равен 120 т**., объем продаж в Иркутске **380 т.**, а в Улан-Удэ – **60 т.**
3. Если перевозка каждого килограмма стоит 2,5 руб., то цена сахара в Иркутске (городе с дефицитом сахара) установиться на уровне, ровно на 2,5 руб. большем цены в Улан-Удэ (городе с избытком сахара). Обозначим цену в Улан-Удэ за p. В Иркутске тогда она составит $(p+2{,}5)$ руб. Суммарный спрос в 2 городах снова приравняем к суммарному предложению:
   $$(1700-40(p+2{,}5))+(1050-30p)=(20(p+2{,}5)-400)+(10p-150),$$
   $$2650-70p=30p-500,\ 100p=3150,\ p^*=\ \mathbf{31{,}5\ руб.}$$
   Цена в Иркутске составит **34 руб.** Иркутский спрос (он же – объем продаж) предполагается в размере $q_D^1=1700-40*34=$**340 т.**, а иркутское предложение $q_S^1=20*34-400=280$ т. Спрос в Улан-Удэ составит $q_D^2=1050-30*31{,}5=$**105 т.**, а предложение $q_S^2=10*31{,}5-150=165$ т. Отсюда получаем **объем перевозок сахара** 340 – 280 = 165 – 105 = **60 т.**

2. Эластичность

Задача 10

Эластичность спроса на «Пепси-колу» по цене «Кока-колы» равна 5. «Кока-кола» подешевела на 10%. Как изменятся продажи «Пепси-колы»?

Решение:

Перекрестная эластичность равна отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены другого товара:

$$\varepsilon=\frac{\%q}{\%p_{\text{др.тов.}}},\ 5=\frac{\%q}{-10\%},\ \%q=-50\%.$$

Таким образом, продажи «Пепси-колы» **упадут на 50%**.

Задача 11

На рынке меховых изделий работает фирма «Мехалыч», продающая шапки по 3 тыс. руб. При этом ценовая эластичность спроса составляет $\varepsilon=-2$. Каким образом фирма должна изменить цену, чтобы увеличить объем продаж в 1,5 раза?

Решение:

Найдем, как нужно изменить цену для увеличения объема продаж на 50%:

$$\varepsilon=\frac{\%q}{\%p},\ \%p=\frac{\%q}{\varepsilon}=\frac{50\%}{-2}=-25\%.$$

Уменьшение цены на 25% означает, что шапки необходимо продавать по цене 3000*0,75 = **2250 руб.**

Задача 12

Мировые цены на нефть за 2007 год выросли на 20%. Как изменилась выручка от продажи нефти, если ценовая эластичность спроса на нефть равна –0,25? Эластичность указана для начальной ситуации.

Решение:

Эластичность равна отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены:

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \ -0{,}25 = \frac{\%q}{20\%}, \ \%q = -5\%.$$

Выручка равна произведению цены и объема продаж:

$$TR = 1{,}2p * 0{,}95q = 1{,}14pq.$$

Таким образом, **выручка от продажи нефти выросла на 14%**.

Задача 13

Косметическая компания продает ежемесячно по 400 упаковок крема при цене 80 руб. До какого уровня она может поднять цену, чтобы продажи упали не ниже 300 упаковок в месяц, если известно, что коэффициент ценовой эластичности спроса на крем равен –2?

Решение:

Эластичность равняется отношению процентного изменения спроса к процентному изменению цены. Объем продаж сокращается с 400 до 300 руб., новый объем составляет $300/400 = 0{,}75 = 75\%$ от старого, сокращение составляет 25%.

$$\varepsilon = \frac{\%q}{\%p}, \quad -2 = \frac{-25\%}{\%p}, \quad \%p = 12{,}5\%.$$

Цену можно повысить на 12,5% до уровня $80 * 1{,}125 =$ **90 руб.**

Задача 14*

Функция спроса на космические полеты на корабле «SpaceShip 2» имеет вид $q_D = 300 - 0{,}5p$, где p – цена, тыс. дол., q – годовое количество полетов, шт. Известно, что компания установила цену, при которой эластичность спроса по цене равна –2. Найти эту цену и соответствующее количество полетов. При условии, что данная цена максимизирует прибыль компании, а суммарные издержки пропорциональны числу полетов, найти себестоимость одного полета.

Решение:

Построим функцию эластичности и найдем, при какой цене ее значение равно –2:

$$\varepsilon(p) = q'(p)\frac{p}{q(p)} = \frac{-0{,}5p}{300 - 0{,}5p} = -2.$$

$$0{,}5p = 2(300 - 0{,}5p), \ 1{,}5p = 600, \ \boldsymbol{p = 400} \textbf{ тыс. дол.}$$

Пусть себестоимость одного полета составляет c тыс.дол. Тогда функция прибыли будет иметь следующий вид:

$$\pi = (p - c)(300 - 0{,}5p) = 300p - 300c + 0{,}5cp - 0{,}5p^2.$$

Она достигает своего максимума, когда ее производная равна нулю:

$$\pi' = 300 + 0{,}5c - p = 0, \quad p = 300 + 0{,}5c = 400, \ \boldsymbol{c = 200} \textbf{ тыс. дол.}$$

Задача 15*

Канцмаркет «Ручной» продает шариковые ручки. Пусть $p \ge 0$ – их цена (руб.), а q – месячный объем продаж (тыс. шт.). Функция спроса имеет вид $q_D = 400/(p+5)-8$.

1. Найти максимально возможный объем продаж. Найти цену, по которой ручки полностью перестанут покупать.
2. Найти ценовую эластичность спроса при цене 15 руб. Нужно ли при этом повышать или понижать цену для максимизации выручки?
3. Если цена, максимизирующая прибыль, составляет 15 руб., а себестоимость одной ручки не зависит от объема продаж, найти эту себестоимость.

Решение:

1. Максимально возможный объем продаж достигается при нулевой цене: $q_D = 400/(0+5)-8 =$ **72 тыс. шт.** Максимально возможной является цена, при которой спрос обращается в ноль: $400/(p+5)-8=0$, $p+5=50$, $p=$ **45 руб.**
2. $\varepsilon = q'_D \dfrac{p}{q_D} = -\dfrac{400}{(p+5)^2}\dfrac{p}{400/(p+5)-8}$.

   При $p=15$ $\varepsilon = -\dfrac{400}{(15+5)^2}\dfrac{15}{400/(15+5)-8} = -\dfrac{400}{400}\dfrac{15}{20-8} =$ **–1,25**.

   Поскольку $|\varepsilon|>1$, для повышения выручки нужно **понижать цену**.
3. Пусть себестоимость одной ручки равна c руб. Тогда прибыль составит

   $$\pi = TR - TC = pq - cq = (p-c)\left(\frac{400}{p+5}-8\right) = \frac{400p}{p+5} - \frac{400c}{p+5} - 8p + 8c \to \max,$$

   $$\pi' = \frac{400}{p+5} - \frac{400p}{(p+5)^2} + \frac{400c}{(p+5)^2} - 8 = 0, \quad \frac{400p+2000-400p+400c}{(p+5)^2} = 8,$$

   $2000 + 400c = 8(p+5)^2 = 8*20^2 = 3200$, $c = 1200/400 =$ **3 руб**.

Задача 16**

Концертное агентство планирует организовать в Москве выступление мировой знаменитости и оценивает спрос. Исследование показало, что эластичность спроса по цене выражается функцией $\varepsilon(p) = -0{,}5 - 0{,}25p$, где p – цена, тыс. руб. Также известно, что при цене 4 тыс. руб. на концерт придет 5 тыс. человек.

1. Определить оптимальную цену, при которой концертное агентство получит максимальную прибыль.
2. Построить функцию спроса на билеты.
3. С ее помощью оценить, в состоянии ли будет агентство обойтись без помощи спонсоров, если предполагаемые расходы составят 25 млн руб.
4. Оценить с помощью функции спроса, достаточно ли будет концертной арены на 10 тыс. зрителей, если билеты предполагается продавать по 2500 руб.

Решение:

1. Максимальная выручка достигается, когда эластичность равна –1. Так что можно даже не вычислять функцию спроса. $\varepsilon(p) = -0{,}5 - 0{,}25p = -1$, p **= 2 тыс. руб.**
2. $\varepsilon(p) = q'(p)\dfrac{p}{q(p)} = -0{,}5 - 0{,}25p$, $\dfrac{q'(p)}{q(p)} = -\dfrac{0{,}5}{p} - 0{,}25$,

   $$q(p) = ae^{\int(-0{,}5/p - 0{,}25)dp} = ae^{-0{,}5\ln p - 0{,}25p} = \frac{a}{\sqrt{p}}e^{-0{,}25p}.$$

Поскольку при $p = 4$ тыс. руб. на концерт придет $q = 5$ тыс. человек, найдем a:

$\frac{a}{\sqrt{4}} e^{-0,25\times 4} = 5$, $ae^{-1} = 5*2 = 10$, $a = 10e$, $q = \frac{10}{\sqrt{p}} e^{1-0,25p}$.

3. Максимальная выручка достигается при цене билета 2 тыс. руб. Подсчитаем ее: $TR_{\max} = pq = 2*\frac{10}{\sqrt{2}} e^{1-0,25*2} = 2*11,66 = 23,32 < 25$ млн руб. Следовательно, **без спонсоров концертному агентству не обойтись**.
4. Оценим с помощью функции спроса количество зрителей, которые придут на концерт при цене билета 2,5 тыс. руб.

   $q = \frac{10}{\sqrt{2,5}} e^{1-0,25*2,5} = 9,2 < 10$ тыс. зрителей. Следовательно, **концертной арены на 10 тыс. зрителей будет достаточно**.

3. Теория потребительского поведения

Задача 17

Школьник Дима получил от родителей 200 руб., которые планирует полностью потратить на мороженое ценой 10 руб., покупку компакт-дисков ценой 80 руб. и выходы в кино ценой 120 руб. Указать все возможные способы распределения имеющихся финансов.

Решение:

Возможными являются **следующие 5 вариантов:**

1. Кино (120) + CD (80).
2. Кино (120) + 8*мороженое (10).
3. 2*CD (80) + 4*мороженое (10).
4. CD (80) + 12*мороженое (10).
5. 20*мороженое (10).

Задача 18

В таблице указаны цены и предельные полезности от приобретения каждой единицы четырех видов блага: похода в ночной клуб, покупки книги, просмотра фильма в кинотеатре и покупки компакт-диска. Найти оптимальный набор для потребителя, выделяющего на эти четыре блага 1000 руб. Подсчитать полезность этого набора.

	Ноч. клуб, 300 руб.	**Книга, 150 руб.**	**Кино, 100 руб.**	**CD, 75 руб.**
1	210	180	150	90
2	180	150	100	60
3	90	120	90	60
4	75	105	80	45
5	60	90	70	45

Решение:

Найдем предельные полезности на 1 руб., разделив указанные в таблице предельные полезности от приобретения каждой единицы блага на соответствующие цены. Результаты сведем в таблице.

	Ноч. клуб, 300 руб.	Книга, 150 руб.	Кино, 100 руб.	CD, 75 руб.
1	0,7	**1,2**	**1,5**	**1,2**
2	0,6	**1**	**1**	**0,8**
3	0,3	**0,8**	**0,9**	0,8
4	0,25	0,7	**0,8**	0,6
5	0,2	0,6	0,7	0,6

Предельные полезности на рубль по всем товарам в точке оптимума должны совпадать. При ограничении в 1000 руб. потребитель приобретает блага с $MU_i / p_i \ge 0{,}8$.

Таким образом, он купит **3 книги, 2 компакт-диска и 4 раза сходит в кино**. Суммарная полезность составит $TU = 180 + 150 + 120 + 150 + 100 + 90 + 80 + 90 + 60 = \mathbf{1020}$.

Задача 19*

Компания, предоставляющая услуги связи, предлагает населению три тарифа: повременной, при котором минута разговора стоит 2 руб., комбинированный с абонентской платой 425 руб., в которую входит 200 бесплатных минут разговора, а каждая последующая минута обходится в 1,5 руб. и безлимитный тариф, обходящийся клиенту в 800 руб. в месяц. При каком месячном объеме разговоров клиент выберет каждый из тарифов? Что изменится, если абонентская плата по комбинированному тарифу снизится до 350 руб.?

Решение:

Пускай клиент разговаривает x минут в месяц. Тогда по повременному тарифу он заплатит $2x$ руб.; по комбинированному, говоря сверх бесплатного пакета $(x-200)$ минут, – $\max\{425; 425+1{,}5(x-200)\}$; и по безлимитному – 800 руб. При малом объеме разговоров наиболее выгодным окажется повременной, а при значительном – безлимитный. Найдем критические объемы, при которых выгодна смена тарифа:

$$2x = 425 + 1{,}5(x-200), \quad 2x = 125 + 1{,}5x, \quad x = 250.$$
$$425 + 1{,}5(x-200) = 800, \quad 125 + 1{,}5x = 800, \quad x = 450.$$

Таким образом, разговаривая **менее 250 минут**, клиент выберет повременной тариф; **более 450 минут** – безлимитный, а внутри диапазона – комбинированный.

Если абонентская плата снизится до 350 руб., то граница перехода на безлимитный тариф **увеличится до 500 минут**:

$$350 + 1{,}5(x-200) = 800, \quad 50 + 1{,}5x = 800, \quad x = 500.$$

При расчете границы перехода на повременной тариф будут некоторые отличия. Если вычислить ее прежним способом, получится:

$$2x = 350 + 1{,}5(x-200), \quad 2x = 50 + 1{,}5x, \quad x = 100 < 200.$$

Следовательно, при переходе на комбинированный тариф клиент будет разговаривать меньше 200 минут и заплатит только абонентскую плату 350 руб.:

$$2x = 350, \quad x = 175.$$

Повременной тариф будет выбран при объеме разговоров **меньше 175 минут**.

Задача 20*

Найти эквивалентные функции полезности, описывающие одинаковые предпочтения потребителей: $u_1 = 2\sqrt{x}\,y$, $u_2 = 0{,}5x + y$, $u_3 = 0{,}5\ln x + \ln y$, $u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2$, $u_5 = 4x^2 + 4 + y^2$, $u_6 = 0{,}5x^2 y$, $u_7 = x + 0{,}5y$, $u_8 = (2x)^2 + y^2$, $u_9 = 3xy^2$, $u_{10} = x + 0{,}5$. Ответ обосновать.

Решение:
С функциями полезности можно проводить любые монотонные преобразования. В частности, разрешается добавлять произвольную константу, умножать на положительное число, возводить в положительную степень, логарифмировать и брать экспоненту. Приведем все функции полезности к простейшему виду:

$$u_1 = 2\sqrt{x}\,y \sim u = x^{0,5}\,y \sim u = x\,y^2;$$
$$u_2 = 0{,}5x + y \sim u = x + 2y;$$
$$u_3 = 0{,}5\ln x + \ln y \sim u = e^{0,5\ln x + \ln y} = x^{0,5}y \sim u = x\,y^2;$$
$$u_4 = 4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2 \sim u = 2x + y;$$
$$u_5 = 4x^2 + 4 + y^2 \sim u = 4x^2 + y^2;$$
$$u_6 = 0{,}5x^2 y \sim u = x^2 y;$$
$$u_7 = x + 0{,}5y \sim u = 2x + y;$$
$$u_8 = (2x)^2 + y^2 = 4x^2 + y^2 \sim u = 4x^2 + y^2;$$
$$u_9 = 3xy^2 \sim u = x\,y^2;$$
$$u_{10} = x + 0{,}5 \sim u = x.$$

Таким образом, получаем следующие группы эквивалентных функций полезности: $u_1 \sim u_3 \sim u_9$; $u_4 \sim u_7$; $u_5 \sim u_8$.

Задача 21

На два товара – шоколад (p_x=15 руб.) и жвачку (p_y=10 руб.) Марина тратит в месяц 210 руб. Построить графически множество потребительских возможностей и записать его в алгебраическом виде. Определить оптимальный выбор, если функция полезности Марины 1) u=18x+2xy; 2) u=2x^4y^3.

Решение:
Выпишем бюджетное ограничение в алгебраической форме: $15x + 10y \le 210$. При этом в точке оптимума тратятся все имеющиеся деньги, поэтому данное ограничение будет выполняться в виде равенства, и можно выразить одну переменную через другую: $10y = 210 - 15x$, $y = 21 - 1{,}5x$. Подставим это выражение в первую функцию полезности:

$$u = 18x + 2x(21 - 1{,}5x) = 60x - 3x^2 \to \max,\ 60 - 6x = 0,\ x = 10,\ y = 21 - 1{,}5 \times 10 = 6.$$

Во втором случае удобно пользоваться свойством, справедливым для функций полезности Кобба – Дугласа $u = Ax^{\alpha}y^{\beta}$: α и β – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. В нашей ситуации средства делятся в пропорции 4:3, т. е. 120 руб. на шоколад и 90 руб. на жвачку. Следовательно, оптимальный выбор $x = 120/15 = 8$ шоколадок и $y = 90/10 = 9$ упаковок жвачки.

Ответ. 1) A(10; 6); 2) B(8; 9).

Задача 22

На бензин (товар x) ценой 25 руб./л., оплату интернета (товар y) ценой 2 руб./Мб и билеты в кино (товар z) ценой 150 руб. некий потребитель тратит 6 тыс. руб./мес. Записать алгебраически его множество потребительских возможностей и найти оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид $u = 5x^7y^2z \to \max$.

Решение:

На покупку x литров бензина, использование y Мб интернет-трафика и z посещений кинотеатра тратится ($25x$+$2y$+$150z$) руб. По условию эта сумма не превышает 6000 руб. Для нахождения оптимального выбора нужно решить задачу

$$u = 5x^7 y^2 z \to \max, \quad 25x + 2y + 150z \le 6000 .$$

Далее ограничение можно переписать в виде равенства, выразить одну переменную через две другие, подставить в функцию полезности и максимизировать ее по обеим переменным. Однако проще вспомнить, что показатели степеней при переменных в функции полезности Кобба – Дугласа – это доли, в которых делится потребительский бюджет. В нашем случае 6000 рублей делятся в соотношении 7:2:1, т. е. на кино тратится 600 руб., на интернет – 600*2=1200 руб. и на бензин – 600*7 = 4200 руб. Таким образом, оптимальный выбор – это 4200/25 = **168 л. бензина**, 1200/2 = **600 Мб трафика** и 600/150 = **4 посещения кинотеатра**.

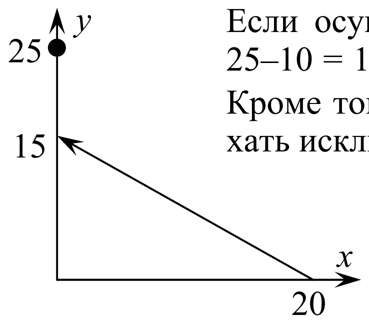
Задача 23*

Три иркутянина планируют летний отпуск, выделив на него по 25 тыс. руб. Они рассматривают две альтернативы: полететь в Китай, где день отдыха обходится в $p_x = 750$ руб., а дорога в 10 тыс. руб., или отдыхать на Байкале по $p_y = 1000$ руб. в день. Построить множество потребительских возможностей. Найти оптимальный выбор каждого из отпускников, если их функции полезности имеют вид

1. $u_1 = x + y$. 2. $u_2 = x^3 y^2$. 3. $u_3 = (x+4)y$.

Здесь x – число дней, проведенных в Китае, а y – число дней отдыха на Байкале.

Решение:



Если осуществляется полет в Китай, то на сам отдых остается 25–10 = 15 тыс. руб. Ограничение имеет вид $750x + 1000y \le 15000$. Кроме того, имеется альтернатива сэкономить на дороге и отдыхать исключительно на Байкале в течение 25 дней.

1. Если максимизировать суммарное число дней отдыха, то выбор между крайними альтернативами: 20 дней в Китае или **25 дней на Байкале** решается в пользу Байкала.
2. Поскольку отсутствие в наборе одного из видов отдыха означает его нулевую полезность, полет в Китай будет осуществлен. Функция полезности $u_2 = x^3 y^2$ означает дележ оставшихся после оплаты дороги 15 тыс. руб. в соотношении 3:2, т.е. 9 тыс. руб. на **12 дней в Китае** и 6 тыс. руб. на **6 дней на Байкале**.
3. Для функции полезности $u_3 = (x+4)y$ необходимо сравнить 25-дневный отдых на Байкале $u_3(0;25) = (0+4)*25 = 100$ и решение следующей задачи оптимизации:

$$\begin{cases} (x+4)y \to \max, \\ 750x + 1000y = 15000, \end{cases}$$

$y = 15 - 0{,}75x$, $(x+4)(15 - 0{,}75x) = 12x - 0{,}75x^2 + 60 \to \max$,

$12 - 1{,}5x = 0$, $x = 8$, $y = 15 - 0{,}75*8 = 9$, $u_3(8;9) = (8+4)*9 = 108 > 100$.

Таким образом, оптимальный выбор: **8 дней в Китае** и **9 дней на Байкале**.

Задача 24**

Студент Михаил тратит в год 7200 руб. на походы в шашлычку, где оставляет по 400 руб., и в пиццерию, где оставляет по 90 руб. за один раз. Найти оптимальный выбор, если функция полезности имеет вид $u = xy$, где x и y – соответственно количество посещений шашлычки и пиццерии. Какую максимальную цену он готов заплатить за действующую в течение года дисконтную карту, дающую скидку в шашлычке в размере 19%?

Решение:

При решении задачи удобно пользоваться свойством, справедливым для функций полезности Кобба – Дугласа $u = Ax^{\alpha} y^{\beta}$: α и β – доли, в которых распределяется имеющаяся сумма. В нашей ситуации средства делятся в пропорции 1:1, т. е. по 3600 руб. на шашлычку и пиццерию. Следовательно, оптимальный выбор $x = 3600/400 =$ **9 походов в шашлычку** и $y = 3600/90 =$ **40 посещений пиццерии**.

При покупке за z руб. дисконтной карты (после чего у Михаила остается $(7200 - z)$ руб., которые по-прежнему делятся пополам, по $(7200 - z)/2$ руб. на каждое из благ), стоимость похода в шашлычку снижается до 324 руб. Таким образом, количество посещений шашлычки составит $(7200 - z)/2/324$ раз, а количество посещений пиццерии – $(7200 - z)/2/90$ раз. При этом полезность данного набора должна оставаться прежней, т. е. равной 9*40=360:

$$\frac{7200 - z}{2*324} * \frac{7200 - z}{2*90} = 360, \quad (7200 - z)^2 = 360*2*324*2*90 = 6480^2,$$

$$7200 - z = 6480, \quad z = 720, \quad x = (7200 - 720)/2/324 = 10, \quad y = (7200 - 720)/2/90 = 36.$$

Таким образом, максимальная сумма, которую готов заплатить Михаил за дисконтную карту, составляет **720 руб.** При этом он станет посещать **шашлычку 10 раз в год**, а **пиццерию 36 раз в год**.

4. Теория фирмы

Задача 25

9 бригад рабочих за 9 дней отремонтировали 9 км дороги. Сколько километров дороги 6 бригад отремонтируют за 6 дней? Ответ пояснить.

Решение:

В новой ситуации число рабочих сокращается в 1,5 раза (6 бригад вместо 9). Также в 1,5 раза (с 9 дней до 6) сокращается время работ. Следовательно, **6 бригад за 6 дней отремонтируют 9/1,5/1,5 = 4 км дороги**.

Задача 26

При увеличении объемов производства на 100% суммарные издержки фирмы увеличились на 50%. Как изменилась себестоимость единицы продукции?

Решение:

Себестоимость единицы продукции равняется отношению суммарных издержек к объему производства. Суммарные издержки выросли в 1,5 раза, а объем производства в 2 раза. Следовательно, себестоимость составила $1{,}5/2 = 0{,}75 = 75\%$ от прежнего уровня, т. е. **сократилась на 25%**.

Задача 27

Средняя зарплата в малой фирме, где работало 4 человека, составляла 30 тыс. руб. Как она изменилась, если фирма наняла еще одного человека с зарплатой 20 тыс. руб.

Решение:

Суммарные затраты на оплату труда в новой ситуации равны $4*30+20=140$ тыс. руб. В среднем на одного человека это составляет $140/5=28$ тыс. руб.

Ответ. Средняя зарплата снизилась **с 30 до 28 тыс. руб.**

Задача 28

Фирма «Стаханов и Ко», получив заказ, декларировала среднюю производительность труда на уровне 10 изделий в день. Однако после выполнения половины заказа оказалось, что каждый рабочий производил только 5 изделий в день. Какой должна быть производительность труда в оставшееся время, чтобы нормативы оказались выполненными?

Решение:

Поскольку каждый рабочий производил деталей вдвое меньше нормы, на первую половину заказа было потрачено времени вдвое больше запланированного, т. е. ровно столько, сколько отводилось на весь заказ. Таким образом, вторая половина заказа должна быть выполнена за нулевое время (**с бесконечно большой производительностью труда**), что, разумеется, **невозможно**.

Задача 29*

В таблице приведена часть данных об объеме производства (q), средней (AP_L) и предельной (MP_L) производительности труда в зависимости от числа работников фирмы (L). Восстановите недостающую информацию.

L, чел.	0	10	20	30	40	50	70	100
q, шт.				1500				
AP_L, шт./чел.		40				41		29
MP_L, шт./чел.			60			25	20	

Решение:

При решении задачи будем пользоваться следующими формулами:

$$AP_L=\frac{q}{L},\quad MP_L=\frac{\Delta q}{\Delta L},\quad q=0 \text{ при } L=0$$

При $L=10$ $q=40*10=400$, $MP_L=(400-0)/(10-0)=40$.

При $L=20$ $\Delta q=60*(20-10)=600$, $q=400+600=1000$, $AP_L=1000/20=50$.

При $L=30$ $AP_L=1500/30=50$, $MP_L=(1500-1000)/(30-20)=50$.

При $L=50$ $q=41*50=2050$, $\Delta q=25*(50-40)=250$.

При $L=40$ $q=2050-250=1800$, $AP_L=1800/40=45$, $MP_L=(1800-1500)/(40-30)=30$.

При $L=70$ $\Delta q=20*(70-50)=400$, $q=2050+400=2450$, $AP_L=2450/70=35$.

При $L=100$ $q=29*100=2900$, $MP_L=(2900-2450)/(100-70)=15$.

L, чел.	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**70**	**100**
q, шт.	0	400	1000	**1500**	1800	2050	2450	2900
AP_L, шт./чел.	–	**40**	50	50	45	**41**	35	**29**
MP_L, шт./чел.	–	40	**60**	50	30	**25**	**20**	15

Задача 30*

Характеризуются ли следующие производственные функции убывающей, постоянной или возрастающей отдачей от масштаба? Здесь q – объем производства, зависящий от величины используемого капитала K и труда L. Объясните ответ.

1. $q = 0{,}5\sqrt{KL}$. 2. $q = 0{,}1KL + K^{2/3}L^{1/3}$. 3. $q = 2\sqrt{KL} + 3\sqrt[3]{KL}$. 4. $q = aK + bL$.

Решение:

Если при увеличении использования каждого из факторов производства в α раз ($\alpha > 1$) объем производства вырастает более чем в α раз, то имеем возрастающую отдачу от масштаба, менее чем в α раз – убывающую, ровно в α раз – постоянную отдачу от масштаба. В нашем случае:

$$q_1(\alpha K;\alpha L) = 0{,}5\sqrt{\alpha K * \alpha L} = \alpha * 0{,}5\sqrt{KL} = \alpha\, q_1(K;L);$$

$$q_2(\alpha K;\alpha L) = 0{,}1\alpha K\alpha L + (\alpha K)^{2/3}(\alpha L)^{1/3} = 0{,}1\alpha^2 KL + \alpha K^{2/3}L^{1/3} >$$
$$> \alpha\left(0{,}1KL + K^{2/3}L^{1/3}\right) = \alpha\, q_2(K;L);$$

$$q_3(\alpha K;\alpha L) = 2\sqrt{\alpha K * \alpha L} + 3\sqrt[3]{\alpha K * \alpha L} = 2\alpha\sqrt{KL} + 3\alpha^{2/3}\sqrt[3]{KL} <$$
$$< \alpha\left(2\sqrt{KL} + 3\sqrt[3]{KL}\right) = \alpha\, q_3(K;L);$$

$$q_4(\alpha K;\alpha L) = a(\alpha K) + b(\alpha L) = \alpha(aK + bL) = \alpha\, q_4(K;L).$$

Ответ. 1. Постоянная отдача от масштаба.
2. Возрастающая отдача от масштаба.
3. Убывающая отдача от масштаба.
4. Постоянная отдача от масштаба.

Задача 31

Типография печатает 600 альбомов с видами Байкала в месяц. Предлагается издавать на этих же производственных мощностях глянцевый журнал. Альтернативные издержки производства альбома равны двум журналам.

1. Определить максимально возможный тираж журнала.
2. Если тираж журнала составляет 750 экземпляров, сколько при этом можно дополнительно напечатать альбомов?

Решение:

1. Максимально возможный тираж журнала 600*2 = **1200 экземпляров**.
2. Если тираж журнала 750 экземпляров, то производственных мощностей остается на 1200–750 = 450 экземпляров, что соответствует 450/2 = **225 альбомам**.

Задача 32

Фермер выращивает на имеющихся у него площадях 150 т огурцов и 50 т помидоров. Альтернативные издержки выращивания тонны огурцов составляют 0,5 т помидоров. Какое максимальное количество огурцов сможет на имеющихся площадях выращивать фермер, если пожелает увеличить производство помидоров до 80 т?

Решение:

Поскольку альтернативные издержки выращивания тонны огурцов составляют 0,5 т помидоров, то альтернативные издержки выращивания тонны помидоров составляют $1/0{,}5 = 2$ т огурцов. Увеличение производства помидоров на $80 - 50 = 30$ т приведет к сокращению производства огурцов на $30 * 2 = 60$ т. Следовательно, их выпуск составит $150 - 60 =$ **90 т**.

Задача 33

Фермер может посадить картошку трех сортов. Урожайность каждого сорта зависит от погодных условий и представлена в таблице, в т/га:

	Хорошие	засуха	дожди	поздние заморозки
сорт 1	11	10	10	0
сорт 2	9	6	7	8
сорт 3	12	6	5	6

Что можно посоветовать нейтральному по отношению к риску фермеру, если в предстоящем году наступление всех погодных условий равновероятно?

Решение:

Вычислим среднюю урожайность каждого сорта:

$$M_1 = (11+10+10+0)/4 = 7{,}75,\ M_2 = (9+6+7+8)/4 = 7{,}5,\ M_3 = (12+6+5+6)/4 = 7{,}25.$$

Отсюда следует, что фермеру нужно выращивать **первый сорт**, дающий среднюю урожайность 7,75 т/га.

Задача 34

В таблице заданы чистые прибыли/убытки (в млн руб.) за каждый год для трех инвестиционных проектов, рассчитанных на 4 года:

	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год
Проект 1	–180	–108	72	432
Проект 2	–330	90	180	216
Проект 3	–100	–120	360	0

Проранжировать проекты по эффективности при дисконте $d = 20\%$. Есть ли среди них убыточные?

Решение:

Приведем чистые прибыли/убытки каждого года к деньгам первого года. Для этого суммы второго года разделим на 1,2, суммы третьего года – на $1{,}2^2=1{,}44$, а суммы последнего года – на $1{,}2^3=1{,}728$.

	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год
Проект 1	–180	–90	50	250
Проект 2	–330	75	125	125
Проект 3	–100	–100	250	0

После этого, просуммировав приведенные прибыли/убытки за 4 года, получим чистую текущую стоимость каждого проекта.

$$NPV_1 = -180 - 90 + 50 + 250 = 30;$$
$$NPV_2 = -330 + 75 + 125 + 125 = -5;$$
$$NPV_3 = -100 - 100 + 250 = 50.$$

Таким образом, при дисконте $d = 20\%$ **наиболее эффективным оказывается проект 3**, **проект 1 немного хуже**, а **проект 2 – с учетом дисконта убыточен**, поскольку приносит прибыль меньше, чем необходимые для рассматриваемого инвестора 20% годовых.

Замечание: если считать, что все данные приведены на конец года, то чистая текущая стоимость проектов окажется в 1,2 раза меньше. На вывод это не влияет.

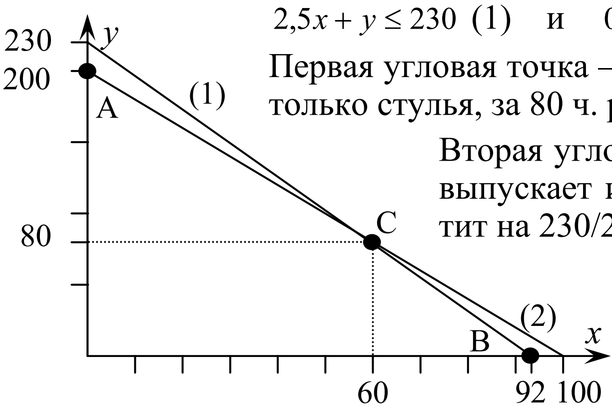
Задача 35*

Столярная мастерская занимается выпуском столов и стульев. На их производство тратится соответственно 2,5 и 1 м доски, а также 0,8 и 0,4 ч. рабочего времени. Построить множество производственных возможностей, если суточные запасы доски равны 230 м, а на фабрике работают 10 рабочих по 8 ч. в сутки. Найти оптимальный объем производства, если прибыли от реализации 1 стола 250 руб., а одного стула 150 руб. Изменится ли что-то, если прибыль от реализации одного стола увеличится до 350 руб.?

Решение:

Пусть мастерская выпускает $x \geq 0$ столов и $y \geq 0$ стульев. Тогда на них тратится $(2{,}5x + y)$ метров доски и $(0{,}8x + 0{,}4y)$ часов рабочего времени. По условию суточные запасы доски составляют 230 м, а суточный ресурс рабочего времени 80 человеко-часов. Поэтому в задаче будет два ограничения:

$$2{,}5x + y \leq 230 \ (1) \quad \text{и} \quad 0{,}8x + 0{,}4y \leq 80 \ (2)$$



Первая угловая точка – точка $A(0;\ 200)$ – мастерская выпускает только стулья, за 80 ч. рабочие сделают 80/0,4 = 200 стульев.

Вторая угловая точка – точка $B(92;\ 0)$ – мастерская выпускает исключительно столы, 230 м доски хватит на 230/2,5 = 92 стола.

И третья угловая точка – точка C. Для ее нахождения нужно решить систему:

$$2{,}5x + y = 230\,,\ 0{,}8x + 0{,}4y = 80\,.$$

Получим координаты точки $C(60;\ 80)$.

Известно, что оптимальный выбор достигается в угловой точке. Найдем прибыли в каждой из них: $\pi(A) = 150 * 200 =$ **30 тыс. руб.**, $\pi(B) = 250 * 92 = 23$ тыс. руб., $\pi(C) = 250 * 60 + 150 * 80 = 27$ тыс. руб. Таким образом, мастерская должна **все ресурсы использовать для выпуска стульев**.

Если прибыль увеличится до 350 руб., то суммарные прибыли станут равны соответственно $\pi(B) = 350 * 92 = 32{,}2$ тыс. руб. и $\pi(C) = 350 * 60 + 150 * 80 =$ **33 тыс. руб.** Оптимум – точка C, **мастерская должна производить и столы, и стулья.**

Задача 36*

Маркетинговое исследование показало, что спрос на некоторую модель сотового телефона составляет $q_D = 3000 - p$ (p – цена, руб., q – объем продаж, шт.). Компания «Шестисотовый» покупает их у производителя по 1600 руб. Какой будет розничная цена? Воспользуется ли компания 5%-ной скидкой от производителя, которую тот предоставляет всем приобретающим от 1 тыс. экземпляров? Изменится ли что-то, если компания-партнер предложит продавать ей излишки по 1220 руб.?

Решение:

Функция прибыли компании «Шестисотовый»

$$\pi = (p - 1600)(3000 - p) = -p^2 + 4600p - 4\,800\,000$$

достигает максимума, когда ее производная равна нулю:

$$\pi' = -2p + 4600 = 0\,,\ \boldsymbol{p} \textbf{ = 2300 руб., } \boldsymbol{q} \textbf{ = 700 шт., } \boldsymbol{\pi} \textbf{ = 490 тыс. руб.}$$

Если компания решит воспользоваться скидкой, она вынуждена будет увеличить продажи телефонов до **1000 штук**. Максимальная цена, по которой это можно осуществить, находится из функции спроса и составляет **2000 руб.** Каждый телефон, покупаемый теперь по 1600*0,95 = 1520 руб., приносит прибыль 480 руб. Соответственно, суммарная прибыль составит **480 тыс. руб.**, что меньше, чем в первом варианте. Следовательно, компания **не будет пользоваться скидкой**.

Если же появляется партнер, ситуация меняется. Если розничная цена устанавливается в размере p руб., то будет продано $(3000 - p)$ телефонов, оставшиеся же $1000 - (3000 - p) = (p - 2000)$ экземпляров будут проданы партнеру с убытками 1520 – 1220 = 300 руб. Итоговая прибыль составит

$$\pi = (p - 1520)(3000 - p) - 300 * (p - 2000) = -p^2 + 4220p - 3\,960\,000 .$$

Приравняв производную к нулю, найдем точку максимума:

$$-2p + 4220 = 0, \ \boldsymbol{p = 2110} \textbf{ руб.}, \ \boldsymbol{q = 890} \textbf{ шт.}, \ \boldsymbol{\pi = 492{,}1} \textbf{ тыс. руб.}$$

Прибыль превышает исходную, поэтому **скидку использовать целесообразно**.

Задача 37*

Фирма продает на рынке совершенной конкуренции продукцию в количестве q (тыс. шт.), производя ее с издержками $TC(q) = 10q^2 + 500q + 40000$ (тыс. руб.)

1. Найти функции постоянных и переменных издержек.
2. Найти цену закрытия фирмы.
3. Найти цену, сложившуюся на рынке, и оптимальный объем продаж фирмы, если ее максимальная прибыль составляет при этом 60 млн руб.

Решение:

1. Постоянные издержки, не зависящие от объема производства $FC = 40\,000$; переменные издержки, зависящие от объема производства $VC = 10q^2 + 500q$.
2. Цена закрытия фирмы равна минимуму средних переменных издержек:
   $p_{закр} = \min AVC = \min\left(10q^2 + 500q\right)/q = \min(10q + 500) = \mathbf{500}$ **руб.**
3. Пусть на рынке сложилась цена p. Оптимальный объем производства достигается при выполнении условия $p = MC = TC' = 20q + 500$. Прибыль при этом составит $\pi = TR - TC = pq - TC = (20q + 500)q - 10q^2 - 500q - 40000 = 10q^2 - 40000 = 60000$, $q^2 = 10000$, $q^* = 100$ тыс. шт., $p^* = 20 \times 100 + 500 = 2500$ руб.
   Ответ. Цена на рынке **2500 руб.**, оптимальный объем продаж **100 тыс. шт.**

Задача 38**

Молокозавод «Священный коровник», производящий молоко с издержками $TC = 50 + 4Q + 0{,}25Q^2$ (тыс. руб.), предлагает свою продукцию трем торговым сетям, суточный спрос которых составляет соответственно $q_1 = 17{,}5 - 0{,}5p$, $q_2 = 11{,}5 - 0{,}5p$ и $q_3 = 18 - p$. Здесь p – цена, руб., q_1, q_2, q_3, Q – суточные объемы продаж, тыс. л.

1. Построить функцию суммарного спроса на продукцию молокозавода.
2. Найти оптимальную цену, объем продаж и прибыль молокозавода, предполагая запрет на использование ценовой дискриминации.
3. Что изменится, если издержки вырастут до уровня $TC = 50 + 5{,}5Q + 0{,}25Q^2$?

Решение:

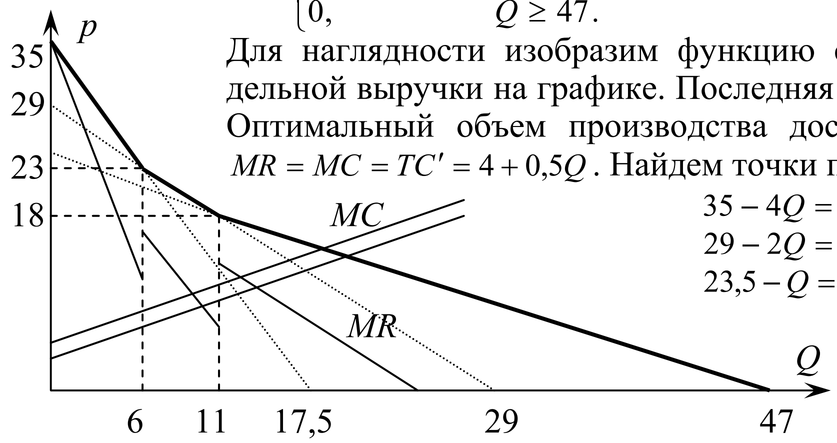
1. Спрос первой из торговых сетей обращается в ноль при цене 35 руб., второй – при цене 23 руб., а третьей – при цене 18 руб. Таким образом, получим:

$$Q=\begin{cases} q_1+q_2+q_3=47-2p, & p\in[0;18] \\ q_1+q_2=29-p, & p\in[18;23], \\ q_1=17{,}5-0{,}5p, & p\in[23;35], \\ 0, & p\ge 35. \end{cases}$$

Отметим, что функция спроса является непрерывной, поэтому граничные значения цены можно включать в любой из интервалов.

2. Для дальнейших действий удобнее перейти к обратной функции спроса, выразив цену через количество на каждом из интервалов. Также вычислим функцию предельной выручки, которая для линейной функции спроса $p=a-bQ$ имеет вид $MR=a-2bQ$, т. е. имеет вдвое больший коэффициент при Q:

$$p=\begin{cases} 35-2Q, & Q\in[0;6], \\ 29-Q, & Q\in[6;11], \\ 23{,}5-0{,}5Q, & Q\in[11;47], \\ 0, & Q\ge 47. \end{cases} \qquad MR=\begin{cases} 35-4Q, & Q\in[0;6], \\ 29-2Q, & Q\in[6;11], \\ 23{,}5-Q, & Q\in[11;47], \\ 0, & Q\ge 47. \end{cases}$$



Для наглядности изобразим функцию спроса и функцию предельной выручки на графике. Последняя из них будет разрывной. Оптимальный объем производства достигается при равенстве $MR=MC=TC'=4+0{,}5Q$. Найдем точки пересечения MR и MC:

$35-4Q=4+0{,}5Q$, $Q=6{,}9\notin[0;6]$,

$29-2Q=4+0{,}5Q$, $Q=10\in[6;11]$,

$23{,}5-Q=4+0{,}5Q$, $Q=13\in[11;47]$.

Таким образом, имеем две подозрительные на оптимум точки. Сравним прибыли.

$Q=10$, $p=29-10=19$, $TR=19*10=190$, $TC=50+4*10+0{,}25*10^2=115$, $\pi=75$.

$Q=13$, $p=23{,}5-0{,}5*13=17$, $TR=17*13=221$, $TC=50+4*13+0{,}25*13^2=144{,}25$, $\pi=76{,}75$.

Видим, что в последнем случае прибыль больше. Таким образом, молокозавод будет обслуживать **все три торговые сети**, продавая молоко по **17 руб./л.**

3. Если $TC=50+5{,}5Q+0{,}25Q^2$, предельные издержки примут вид $MC=5{,}5+0{,}5Q$.

$35-4Q=5{,}5+0{,}5Q$, $Q=6{,}6\notin[0;6]$,

$29-2Q=5{,}5+0{,}5Q$, $Q=9{,}4\in[6;11]$, $p=19{,}6$, $TR=184{,}24$, $TC=123{,}79$, $\pi=60{,}45$.

$23{,}5-Q=5{,}5+0{,}5Q$, $Q=12\in[11;47]$, $p=17{,}5$, $TR=210$, $TC=152$, $\pi=58$.

Видим, что прибыль больше в первом случае. Таким образом, молокозавод установит цену **19,6 руб./л.** и будет обслуживать **только две торговые сети**.

Задача 39**

Кондитерская фирма «Пир-ОК» печет пирожные и торты, максимальный суточный выпуск которых (при отсутствии производства другого продукта) составляет 10 тыс. и 500 шт. соответственно, а граница множества производственных возможностей является отрезком прямой. Спрос на пирожные неограничен при цене 10 руб. за штуку, при этом издержки производства заданы функцией $TC_1(q_1)=15000+5q_1$, где q_1 – объем производства пирожных. Суточный спрос на торты задан функцией $q_2=750-2{,}5p_2$, где p_2 – цена торта, а q_2 – объем продаж.

Издержки производства тортов заданы функцией $TC_2(q_2) = 10\ 000 + 50q_2 + 0{,}1q_2^2$. Найти оптимальные объемы производства и цены каждого продукта, а также прибыль производителя. Меняется ли что-то, если при выпуске только одного из продуктов постоянные издержки для второго отсутствуют?

Решение:

Альтернативные издержки производства одного торта составляют $10\ 000/500 = 20$ пирожных. Пусть фирма выпекает $q_2 = q$ тортов, тогда объем выпечки пирожных составит $10\ 000 - 20q$, выручка от их продажи $TR_1 = 10(10\ 000 - 20q) = 100\ 000 - 200q$, а издержки $TC_1 = 15\ 000 + 5(10\ 000 - 20q) = 65\ 000 - 100q$. Поскольку спрос на торты задан функцией $q = 750 - 2{,}5p$, то, выразив цену через количество, найдем максимальную цену, по которой все q тортов фирма в состоянии продать: $p = 300 - 0{,}4q$. Выручка за проданные торты будет равна $TR_2 = (300 - 0{,}4q)q = 300q - 0{,}4q^2$, а издержки $TC_2 = 10\ 000 + 50q + 0{,}1q^2$. Построим и максимизируем функцию прибыли:

$$\pi(q) = TR_1(q) - TC_1(q) + TR_2(q) - TC_2(q) =$$
$$= (100\ 000 - 200q) - (65\ 000 - 100q) + (300q - 0{,}4q^2) - (10\ 000 + 50q + 0{,}1q^2) =$$
$$= 25\ 000 + 150q - 0{,}5q^2 \to \max.$$

Приравняв производную к нулю или найдя вершину параболы, получим:

$150 - q = 0$, $q_2 = q = 150$ тортов,

$p_2 = 240$ руб./торт, $q_1 = 10\ 000 - 20 * 150 = 7\ 000$ пирожных,

$TR_1 = 100\ 000 - 200 * 150 = 70\ 000$ руб., $TC_1 = 65\ 000 - 100 * 150 = 50\ 000$ руб.

$TR_2 = 300 * 150 - 0{,}4 * 150^2 = 36\ 000$ руб., $TC_2 = 10\ 000 + 50 * 150 + 0{,}1 * 50^2 = 19\ 750$ руб.

Таким образом, фирма «Пир-ОК» будет выпекать **150 тортов** и **7000 пирожных** в сутки, цена торта составит **240 руб.** Суточная прибыль окажется равной $(70\ 000 - 50\ 000) + (36\ 000 - 19\ 750) =$ **36 250 руб.**

Если при выпуске исключительно пирожных издержки производства тортов равны нулю, то фирма может получить прибыль $\pi = 10q_1 - 15\ 000 - 5q_1 = 5q_1 - 15\ 000$. При максимально возможном выпуске в 10 тыс. пирожных она составит **35 000 руб.**

Если при выпуске исключительно тортов издержки производства пирожных равны нулю, то фирма может получить прибыль $\pi = p_2q_2 - TC_2(q_2) = (300 - 0{,}4q_2)q_2 - 10\ 000 - 50q_2 - 0{,}1q_2^2 = 250q_2 - 0{,}5q_2^2 - 10\ 000$. Максимизируем ее:

$250 - q_2 = 0$, $q_2 = 250 < 500$, $p = 300 - 0{,}4 * 250 = 200$,

$\pi = 200 * 250 - 10\ 000 - 50 * 250 - 0{,}1 * 250^2 =$ **21 250 руб.**

Видим, что оба этих варианта хуже, чем вариант с выпуском обоих видов продукции. Поэтому **отсутствие постоянных издержек ничего не изменит**.

Задача 40**

Издательство решает вопрос об издании новой книги известного писателя, спрос на которую оценивается функцией $q_D = 20 - 0{,}1p$ (тыс. шт.), где p – цена, руб. Постоянные издержки составляют 400 тыс. руб. Себестоимость экземпляра книги 25 руб. При этом за право издания оно должно выплатить писателю гонорар 500 тыс. руб. Возьмется ли издательство издавать книгу, если оно применит «политику снятия сливок», установив изначально высокую цену, по которой книгу, по оценкам, купит половина из готовых это сделать по такой цене, а затем снизив цену? Найти оптимальные цены.

Решение:

Пусть издательство изначально устанавливает цену p_1. По этой цене книгу купит половина из готовых это сделать: $q_1 = 0{,}5*(20 - 0{,}1p_1) = 10 - 0{,}05p_1$. После снижения цены до уровня p_2 книгу купят оставшиеся покупатели, кроме уже купивших: $q_2 = (20 - 0{,}1p_2) - (10 - 0{,}05p_1) = 10 - 0{,}1p_2 + 0{,}05p_1$. Суммарная прибыль издательства составит

$$\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - 25(q_1 + q_2) - 400 - 500 =$$
$$= 10p_1 - 0{,}05p_1^2 + 10p_2 - 0{,}1p_2^2 + 0{,}05p_1p_2 - 250 + 1{,}25p_1 - 250 + 2{,}5p_2 - 1{,}25p_1 - 900 =$$
$$= -0{,}05p_1^2 - 0{,}1p_2^2 + 0{,}05p_1p_2 + 10p_1 + 12{,}5p_2 - 1400 \to \max_{p_1, p_2}.$$

Для максимизации функции прибыли приравняем частные производные к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi}{\partial p_1} = -0{,}1p_1 + 0{,}05p_2 + 10 = 0, \\ \dfrac{\partial\pi}{\partial p_2} = -0{,}2p_2 + 0{,}05p_1 + 12{,}5 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}1p_1 + 0{,}05p_2 + 10 = 0, \\ -0{,}4p_2 + 0{,}1p_1 + 25 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}35p_2 = 35.$$

Таким образом, $\boldsymbol{p_2}$**=100 руб.**, $\boldsymbol{p_1}$**=150 руб.**, $\boldsymbol{q_1}$**=2,5 тыс. шт.**, $\boldsymbol{q_2}$**=7,5 тыс. шт.**,
π = 150*2,5 + 100*7,5 – 25*(2,5 + 7,5) – 400 – 500 = **–25 тыс. руб.** Следовательно, издательство **не возьмется за издание книги**.

5. Теория отраслевых рынков

Задача 41*

На рынке действуют два олигополиста, которые могут сотрудничать или действовать исходя из собственных интересов. Соответствующие годовые прибыли (в млн руб.) в зависимости от выбранных стратегий приведены в следующей таблице:

фирма 1 \ фирма 2	**сотрудничество**	**собственные интересы**
сотрудничество	$(140; 140)$	$(0; 220)$
собственные интересы	$(220; 0)$	$(105; 105)$

Если одна из фирм начинает действовать в собственных интересах, то другая больше не идет на сотрудничество. Определить, какая из стратегий будет оптимальной, если вероятность продолжения взаимодействия на каждый последующий год равна 80%, а дисконтирующий множитель равен 0,9 (рубль, полученный через год, равен сегодняшним 90 копейкам).

Решение:

Если мы выбираем стратегию сотрудничества, то в первый год получаем 140 млн руб., во второй – с вероятностью 80% 140 млн руб., которые для нас превратятся в 140*0,9=126 млн руб. и т.д. Если мы предпочитаем действовать в собственных интересах, то в первый год получаем 220 млн руб., во второй – с вероятностью 80% 105 млн руб., которые для нас превратятся в 105*0,9=94,5 млн руб. и т.д. Сравним чистую текущую стоимость для данных двух вариантов:

$$NPV_1 = 140 + 0{,}8*140*0{,}9 + 0{,}8^2*140*0{,}9^2 + ... = 140/(1 - 0{,}8*0{,}9) = 140/0{,}28 = 500.$$
$$NPV_2 = 220 + 0{,}8*105*0{,}9 + 0{,}8^2*105*0{,}9^2 + ... = 220 + 105*0{,}72/(1 - 0{,}72) = 490.$$

Таким образом, каждой из фирм выгоднее **вести политику сотрудничества**, при которой они получат с учетом дисконтирования в среднем по **500 млн руб.**

Задача 42*

Месячный спрос на бананы на Иркутском рынке выражается функцией $Q=100-p$ (т), где p – цена, руб./кг. Рынок поделен между поставщиком бананов из Эквадора (их себестоимость составляет 10 руб./кг) и из Бодайбо (40 руб./кг). Найти точку равновесия Курно. Что изменится, если в результате плохих погодных условий себестоимость бодайбинских бананов увеличится до 60 руб./кг?

Решение:

Пусть поставщик бананов из Эквадора привозит их в количестве q_1, а поставщик бананов из Бодайбо – в количестве q_2. Суммарные поставки будут равны $Q = q_1 + q_2$, а цена $p = 100 - Q = 100 - q_1 - q_2$. Прибыли составят соответственно

$$\pi_1 = pq_1 - 10q_1 = (100 - q_1 - q_2)q_1 - 10q_1 = 90q_1 - q_1^2 - q_1q_2 \to \max_{q_1},$$

$$\pi_2 = pq_2 - 40q_2 = (100 - q_1 - q_2)q_2 - 40q_2 = 60q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \to \max_{q_2}.$$

Приравняв частные производные к нулю, найдем кривые реакции (оптимальные отклики каждого поставщика):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\pi_1}{\partial q_1} = 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\pi_2}{\partial q_2} = 60 - 2q_2 - q_1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ 120 - 2q_1 - 4q_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 30 - 3q_2 = 0.$$

Таким образом, $q_2 = \mathbf{10}$ **(т),** $q_1 = 60 - 2*10 = \mathbf{40}$ **(т),** $Q = 40 + 10 = \mathbf{50}$ **(т),** $p = \mathbf{50}$ **(руб.).**

При повышении себестоимости бодайбинских бананов до 60 руб. функция прибыли примет вид

$$\pi_2 = pq_2 - 60q_2 = (100 - q_1 - q_2)q_2 - 60q_2 = 40q_2 - q_2^2 - q_1q_2 \to \max_{q_2},$$

а кривая реакции может быть найдена из условия

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial q_2} = 40 - 2q_2 - q_1 = 0 \Leftrightarrow 80 - 2q_1 - 4q_2 = 0.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 90 - 2q_1 - q_2 = 0, \\ 80 - 2q_1 - 4q_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 10 + 3q_2 = 0,$$

получим, что $q_2 = -10/3 < 0$. Следовательно, поставщику из Бодайбо вообще **нет смысла выходить на рынок**. Если же $q_2 = 0$ и поставщик эквадорских бананов становится монополистом, его оптимальный объем поставок будет равен (из кривой реакции) $q_1 = 90/2 = \mathbf{45}$ **(т)**, а цена $p = 100 - 45 = \mathbf{55}$ **(руб.)**.

Задача 43*

На рынке со спросом $Q = 1200 - p$ действует устанавливающая цену фирма-лидер, характеризующаяся более низкими издержками $TC_0(q_0) = q_0^2 + 300q_0 + 2000$, и 5 фирм конкурентного окружения, чьи издержки производства равны $TC_i(q_i) = 5q_i^2 + 300q_i + 2000$.

1. Какую цену установит лидер с целью максимизации своей прибыли? Какими будут объемы поставок лидера и конкурентов? Чему равны их прибыли?
2. Смогут ли на рынке помимо лидера разместиться не 5, а 30 фирм конкурентного окружения?

Решение:

1. Пусть фирма-лидер устанавливает цену p. Тогда каждая из фирм-конкурентов принимает решение об объемах поставок из условия $p = MC_i = 10q_i + 300$, откуда $q_i = (p - 300)/10$. Поскольку таких фирм 5, их суммарные продажи составят $Q_i = 5q_i = 0{,}5p - 150$, а остаточный спрос на продукцию лидера окажется равным $q_0 = Q - Q_i = (1200 - p) - (0{,}5p - 150) = 1350 - 1{,}5p$, что эквивалентно $p = 900 - 2/3q_0$. Выпишем функцию прибыли лидера и максимизируем ее:
$$\pi_0 = pq_0 - TC_0(q_0) = (900 - 2/3q_0)q_0 - q_0^2 - 300q_0 - 2000 = 600q_0 - 5/3q_0^2 - 2000 \to \max,$$
$$\pi' = 600 - 10/3q_0 = 0,\ q_0 = 180,\ p = 900 - 2/3*180 = 780,\ q_i = (780 - 300)/10 = 48,$$
$$\pi_0 = 780*180 - 180^2 - 300*180 - 2000 = 52000,$$
$$\pi_i = 780*48 - 5*48^2 - 300*48 - 2000 = 9520.$$
2. Если на рынке действуют 30 конкурентных фирм, все вычисления будут такими же с одной поправкой: $Q_i = 30q_i = 3p - 900$, $q_0 = Q - Q_i = 2100 - 4p$, $p = 525 - 0{,}25q_0$.
$$\pi_0 = (525 - 0{,}25q_0)q_0 - q_0^2 - 300q_0 - 2000 = 225q_0 - 1{,}25q_0^2 - 2000 \to \max,$$
$$\pi' = 225 - 2{,}5q_0 = 0,\ q_0 = 90,\ p = 525 - 0{,}25*90 = 502{,}5,\ q_i = (502{,}5 - 300)/10 = 20{,}25,$$
$$\pi_i = 502{,}5*20{,}25 - 5*20{,}25^2 - 300*20{,}25 - 2000 = 50{,}3125 > 0.$$
Поскольку прибыли фирм конкурентного окружения, хоть и небольшие, но находятся в положительной области, **фирмы войдут на рынок**.

Задача 44*

На рынке со спросом $Q_D = 300 - 3p$ (p – цена, руб., Q – объем продаж, тыс. шт.) работают 10 одинаковых фирм, суммарные издержки каждой из которых заданы в виде $TC(q) = q^2 + 20q + 100$. 4 фирмы объединяются в картель для максимизации прибыли, а остальные 6 формируют конкурентное окружение. Найти объемы продаж каждой из фирм картеля и конкурентного окружения, а также цену, сложившуюся на рынке.

Решение:

Пусть на рынке установилась цена p. Тогда каждая из фирм конкурентного окружения будет поставлять объем продукции q_1, максимизирующий ее прибыль:
$$\pi_1 = pq_1 - q_1^2 - 20q_1 - 100 \to \max_{q_1},\ p - 2q_1 - 20 = 0,\ q_1 = 0{,}5p - 10.$$
В совокупности 6 таких фирм поставят на рынок $Q_1 = 6q_1 = 6(0{,}5p - 10) = 3p - 60$. Картелю в этом случае остается $Q_k = Q_D - Q_1 = 300 - 3p - 3p + 60 = 360 - 6p$. Поскольку в картель входят 4 одинаковые фирмы, каждой из них достается объем поставок $q_k = Q_k/4 = 90 - 1{,}5p$, что эквивалентно условию $p = 60 - 2/3q_k$. Найдем, при какой цене прибыль фирмы картеля будет максимальна:
$$\pi_k = pq_k - q_k^2 - 20q_k - 100 = \left(60 - \frac{2}{3}q_k\right)q_k - q_k^2 - 20q_k - 100 = -\frac{5}{3}q_k^2 + 40q_k - 100 \to \max_{q_k}.$$
$$-10/3q_k + 40 = 0,\ q_k = \mathbf{12},\ p = 60 - 2/3*12 = \mathbf{52},\ q_1 = 0{,}5*52 - 10 = \mathbf{16}.$$

Задача 45**

Продажу винограда на рынке с суточным спросом $q_D = 2000 - 20p$ контролирует фирма «Кишмиш». Однажды на рынке появляется конкурент, предлагающий сделку: он быстро продает 400 кг винограда по 50 руб., после чего фирма «Кишмиш» остается монополистом на остаточном спросе. Альтернативой является продажа винограда по цене не выше 50 руб. Тогда конкурент в борьбу не вступает.

1. Определить экономически оптимальное поведение и прибыль фирмы «Кишмиш» в этих условиях, если себестоимость килограмма винограда для нее составляет 40 руб./кг. Считать, что покупать дешевый виноград у конкурента будут случайно подошедшие покупатели (остаточный спрос пропорционален суммарному).
2. Может ли конкурент увеличить свои прибыли, управляя своей ценой и объемом поставок? Себестоимость винограда для него также составляет 40 руб./кг.

Решение:

1. Рассмотрим обе альтернативы. Первая состоит в том, чтобы продавать виноград не дороже конкурента: $p=50$ руб. Тогда покрывается весь рыночный спрос $q_D=2000-20*50=1000$ кг. Прибыль от продажи 1 кг составит 10 руб., а суммарная прибыль $\pi_1=10*1000=10\,000$ руб.

   Вторая альтернатива состоит в допущении конкурента на рынок и последующем извлечении монопольной прибыли на остаточном спросе. По цене $p=50$ объем спроса составляет 1000 кг. Из них 400 кг, т. е. 40%, продает конкурент. Поскольку дешевый виноград покупают случайно подошедшие покупатели, то остаточный спрос составит при любой цене, начиная с 50 руб., 60% от первоначального. $q_{\text{ост}}=0{,}6(2000-20p)=1200-12p$. Прибыль от продажи 1 кг винограда составит $(p-40)$ руб. Максимизируем суммарную прибыль:

   $$\pi_2=(p-40)(1200-12p)=-12p^2+1680p-48\,000\to\max,$$

   Продифференцируем прибыль и приравняем производную к нулю:

   $$\pi_2'=1680-24p=0,\ p^*=70,\ q^*=1200-12*70=360,\ \pi_2=30*360=10800 \text{ руб.}$$

   Поскольку $\pi_2>\pi_1$, фирме «Кишмиш» выгоднее **допустить конкурента** на рынок, но **продавать виноград по монопольной цене**.

2. Конкурент в рассмотренном примере продает 400 кг винограда, получая с каждого килограмма прибыль в размере 10 руб. Таким образом, его суммарная прибыль составляет 4000 руб. Для ее увеличения необходимо, как минимум, чтобы фирме «Кишмиш» было выгодно пустить конкурента на рынок.

   Пусть конкурент предлагает виноград в объеме K по цене p. Если «Кишмиш» не хочет допустить его на рынок, он должен продавать виноград по цене p в объеме $q=2000-20p$, получая при этом прибыль $\pi_1=(p-40)(2000-20p)=2800p-20p^2-80000$.

   Если же «Кишмиш» ради монопольной цены 70 руб./кг и удельной прибыли 30 руб./кг готов впустить конкурента, тот займет долю рынка $K/(2000-20p)$. При цене винограда 70 руб. суммарный спрос составит 2000 – 20*70 = 600 кг. Остаточный спрос, достающийся «Кишмишу», равен $q_{\text{ост}}=600*(1-K/(2000-20p))$, а соответствующая прибыль равна $\pi_2=30*600*(1-K/(2000-20p))$.

   Поскольку для конкурента необходимо выполнение условия $\pi_2\ge\pi_1$, найдем максимально возможный объем поставок K при произвольной цене p (неравенство в этом случае будет выполняться как равенство):

   $$18\,000*(1-K/(2\,000-20p))=2\,800p-20p^2-80\,000,$$

   $$\frac{-18\,000K}{2\,000-20p}=2\,800p-20p^2-98\,000,\ K=(100-p)(p^2-140p+4\,900)/45.$$

Теперь максимизируем прибыль конкурента

$$\pi = (p-40)K = (p-40)(100-p)\left(p^2 - 140p + 4\,900\right)/45 \to \max,$$

$$\pi = -\left(p^2 - 140p + 4\,000\right)\left(p^2 - 140p + 4\,900\right)/45 \to \max,$$

$$\pi = -\left(\left(p^2 - 140p + 4\,450\right) - 450\right)\left(\left(p^2 - 140p + 4\,450\right) + 450\right)/45 \to \max,$$

$$\left(p^2 - 140p + 4450\right)^2 - 450^2 \to \min,\ \left(p^2 - 140p + 4450\right)^2 \to \min,\ p^2 - 140p + 4450 = 0.$$

$$D = 70^2 - 4450 = 450,\ p = 70 - \sqrt{450} \approx 48{,}79,\ K \approx 512{,}13,\ \pi = 450^2/45 = 4500.$$

Ответ. Максимально возможная прибыль конкурента составляет **4500 руб.**

Задача 46**

На рынке компакт-дисков действуют n независимых конкурентов. Спрос на продукцию каждого из них (тыс. шт.) в зависимости от цен вычисляется по формуле

$$q_i = \frac{160 - p_1}{n} - p_i + \frac{1}{n-1}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} p_j.$$

Здесь p_1 – цена в самой дешевой фирме, $p_i,\ i = 2,...,n$ – цены в остальных фирмах. Найти точку Нэша, в которой ни одной из фирм невыгодно менять цены, для двух, трех и произвольного числа фирм, если каждой из них диски обходятся в $c = 50$ руб.

Решение:

Видим, что функция спроса отличается только для самого дешевого олигополиста: если снижается цена в самой дешевой фирме, то помимо перераспределения покупателей между конкурентами происходит расширение рынка. Выпишем его функцию прибыли и функции прибыли остальных фирм, максимизируем их. Учтем при этом, что в точке оптимума $p_2 = p_3 = ... = p_n = p^*$:

$$\pi_1 = (p_1 - 50)\left(\frac{160 - p_1}{n} - p_1 + \frac{1}{n-1}\left(p_2 + p_3 + ... + p_n\right)\right) =$$

$$= \frac{160p_1}{n} - \frac{(n+1)p_1^2}{n} + \frac{p_1}{n-1}\left(p_2 + ... + p_n\right) -$$

$$- \frac{160\times 50}{n} + \frac{50(n+1)p_1}{n} - \frac{50}{n-1}\left(p_2 + ... + p_n\right) \to \max_{p_1},$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{160}{n} - \frac{2(n+1)}{n}p_1 + \frac{1}{n-1}(n-1)p^* + \frac{50(n+1)}{n} = 0,\quad \boxed{p_1 = \frac{160 + 50(n+1) + np^*}{2(n+1)}}.$$

$$\pi_i = (p_i - 50)\left(\frac{160 - p_1}{n} - p_i + \frac{1}{n-1}\left(p_1 + ... + p_{i-1} + p_{i+1} + ... + p_n\right)\right) =$$

$$= \frac{(160 - p_1)p_i}{n} - p_i^2 + \frac{p_i}{n-1}\left(p_1 + ... + p_{i-1} + p_{i+1} + ... + p_n\right) -$$

$$- \frac{(160 - p_1)50}{n} + 50p_i - \frac{50}{n-1}\left(p_1 + ... + p_{i-1} + p_{i+1} + ... + p_n\right) \to \max_{p_i},\ i = 2,...,n,$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial p_i} = \frac{160 - p_1}{n} - 2p^* + \frac{1}{n-1}\left(p_1 + (n-2)p^*\right) + 50 = 0,$$

$$\frac{160}{n} + 50 + \frac{n - (n-1)}{n(n-1)}p_1 - \frac{2n - 2 - (n-2)}{n-1}p^* = 0,\quad \boxed{p_1 = n^2p^* - 160(n-1) - 50n(n-1)}.$$

Приравниваем полученные выражения для p_1 и находим p^*:

$$\frac{160 + 50(n+1) + np^*}{2(n+1)} = n^2p^* - 160(n-1) - 50n(n-1),$$

$$2n^2(n+1)p^* - 320(n^2-1) - 100n(n^2-1) - 160 - 50(n+1) - np^* = 0,$$

$$p^* = \frac{320(n^2-1)+100n(n^2-1)+50(n+1)+160}{2n^3+2n^2-n} = \boxed{50+\frac{220n^2-110}{2n^3+2n^2-n}}.$$

Выразим p_1:

$$p_1 = \frac{220n^3-110n}{2n^2+2n-1} - 110n + 160 = \frac{100n^2+320n-160}{2n^2+2n-1} = \boxed{160-\frac{220n^2}{2n^2+2n-1}}.$$

Подставив в полученные формулы значения $n=2$ и $n=3$, получим:

$n=2$: $p_1 = 80$, $p^* = 85$, $q_1 = 45$, $q^* = 35$, $\pi_1 = 1350$, $\pi^* = 1225$.

$n=3$: $p_1 = 73{,}9$, $p^* = 77{,}1$, $q_1 = 31{,}9$, $q^* = 27{,}1$, $\pi_1 = 762$, $\pi^* = 734$.

6. Макроэкономика

Задача 47

Инфляция за 2007 год составила 15%. По прогнозам правительства, в 2008 году она составит 12,5%, а в 2009 году – 12%. На сколько процентов, по прогнозам, вырастут цены за 3 года?

Решение:

Цены за 3 года вырастут в 1,15*1,125*1,12 = 1,449 раза, т. е. **на 44,9%**.

Задача 48

Денежная масса в России за 2007 год выросла с 4 до 6 трлн руб. Какую следует ожидать инфляцию, если объем производства при этом вырос на 8%, а скорость обращения сократилась на 19%?

Решение:

По уравнению денежного обмена Ньюкомба – Фишера $I_P I_Q = I_M I_v$. Здесь I_P – индекс цен, I_Q – индекс объемов производства, I_M – индекс денежной массы, I_v – индекс скорости обращения. В нашем случае $I_M = 6/4 = 1{,}5$, $I_Q = 1{,}08$, $I_v = 0{,}81$. Отсюда $I_P = I_M I_v / I_Q = 1{,}5 * 0{,}81/1{,}08 = 1{,}125 = 112{,}5\%$. Таким образом, инфляция составит **12,5%**.

Задача 49

На конец 2008 года денежная масса в России составит 8 трлн руб. В каком объеме Центральный банк может допечатать денег в 2009 году, чтобы инфляция не превзошла уровень 13,4% годовых, если предполагается рост производства в 5%, а скорость обращения из-за повысившейся инфляции увеличится на 8%?

Решение:

В соответствии с уравнением денежного обмена Ньюкомба – Фишера, $I_p I_q = I_M I_v$, где I_p – индекс цен, I_q – индекс объема производства, I_M – индекс денежной массы и I_v – индекс скорости обращения. В нашем случае $I_p = 1{,}134$ (инфляция составит 13,4%), $I_q = 1{,}05$ (производство вырастет на 5%), $I_v = 1{,}08$ (скорость обращения увеличится на 8%). Найдем индекс денежной массы:

$$I_M = I_p I_q / I_v = 1{,}134 * 1{,}05/1{,}08 = 1{,}1025.$$

Денежная масса может быть увеличена в 1,1025 раза или на 10,25%. Следовательно, можно напечатать 8*10,25% = **0,82 трлн руб**.

Задача 50

Указать, что из перечисленного войдет в состав ВВП России текущего года:
1. На 1 млн руб. произведен материал для пошива костюмов.
2. Перед новым годом фирма сшила 100 костюмов, которые собирается продать в следующем году.
3. Фирма купила на 2000 руб. российских конфет для подарков своим сотрудникам.
4. Российские специалисты строят атомную электростанцию в Индии.
5. «Альфа-банк» приобрел контрольный пакет акций «Бета-банка».

Решение:
1. **Не войдет**, т. к. материал не является готовой продукцией.
2. **Войдет**, т. к. продукция входит в ВВП по году производства.
3. **Войдет**, т. к. продана конечная продукция, произведенная на территории России.
4. **Не войдет**, т. к. работы проводятся за пределами России.
5. **Не войдет**, т. к. любые финансовые сделки не входят в состав ВВП.

Задача 51*

Рассчитать ВВП любым способом, если имеются следующие данные, трлн руб.:

Амортизация	2,7	Потребительские расходы	16,9
Государственные расходы	3,3	Прибыль некорпоратив. Сектора	3,4
Дивиденды	2,5	Прямые налоги	4,2
Заработная плата	10,5	Трансферты	4,6
Импорт	3,9	Чистые инвестиции	1,6
Косвенные налоги	2,8	Экспорт	7,1

Решение:
ВВП по расходам вычисляется как сумма потребительских, инвестиционных, государственных расходов и чистого экспорта ($Y = C + I + G + NX$). В свою очередь, инвестиционные расходы – это сумма чистых инвестиций и амортизации, а чистый экспорт равен разности экспорта и импорта.
Таким образом, ВВП = 16,9+(1,6+2,7)+3,3+(7,1–3,9) = **27,7 трлн руб.**

Задача 52

Нормативный износ станка достигается при производстве 500 тыс. деталей. Ликвидационная стоимость составляет 30 тыс. руб. Остаточная стоимость станка после изготовления 200 тыс. деталей составляет 240 тыс. руб. Найти первоначальную стоимость станка, предполагая линейный метод начисления амортизации.

Решение:
Обозначим первоначальную стоимость за x. Получим соотношение:

$$x - \frac{x-30}{500} * 200 = 240,\ x - 0{,}4(x-30) = 240,\ 0{,}6x = 240 - 12 = 228,\ x = 228/0{,}6 = 380.$$

Ответ. Первоначальная стоимость станка составляет **380 тыс. руб.**

Задача 53

Ставка единого социального налога составляет 26% при годовом доходе до 280 тыс. руб., 10% при доходе от 280 до 600 тыс. руб. и 2% при доходе свыше 600 тыс. руб. Какова сумма налога, которую необходимо уплатить работнику со среднемесячным доходом 60 тыс. руб.?

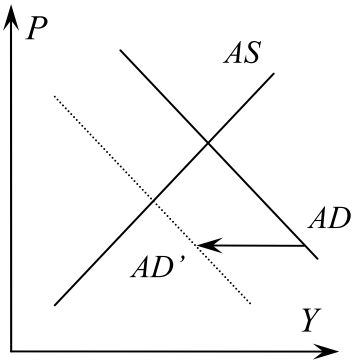
Решение:
Годовой доход работника составляет 60*12=720 тыс. руб. С первых 280 тыс. руб. он должен заплатить 26%, со следующих 320 тыс. руб. (от 280 до 600) – 10%. Наконец, с последних 120 тыс. руб. (свыше 600) – 2%. Рассчитаем итоговую сумму:

$$280 * 0{,}26 + 320 * 0{,}1 + 120 * 0{,}02 = 72{,}8 + 32 + 2{,}4 = 107{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ. Работник должен уплатить налог в размере **107,2 тыс. руб.**

Задача 54*

Каких изменений совокупного спроса и совокупного предложения следует ожидать в связи с укреплением рубля относительно мировых валют? Что произойдет с равновесным уровнем цен и объемом производства? Предположить нахождение на промежуточном участке.
Оценить, правильно ли действует государство, ведущее с целью закрепить успех «политику дорогих денег», в частности, повышая ставку рефинансирования.
Решение:
Совокупный спрос складывается из потребительского, инвестиционного, государственного спроса и чистого экспорта. В результате укрепления рубля увеличится ставший более выгодным импорт и сократится экспорт. Таким образом, за счет сокращения чистого экспорта **уменьшится (сдвинется влево) совокупный спрос**. В точке равновесия уменьшатся цены и физический объем производства. Причем, если вспомнить, что цены жесткие в сторону понижения, сокращение коснется, в первую очередь, производства.



Если Центральный банк повысит ставку рефинансирования, поползут вверх банковские ставки по кредитам и депозитам, станет менее выгодно приобретать товары и услуги (особенно за счет заемных средств), а более выгодно держать деньги в банке. Потребительский и инвестиционный спрос сократится, кривая AD продолжит смещение влево, что чревато еще большим сокращением производства. В данной ситуации можно посоветовать Центральному банку **снизить ставку рефинансирования** с целью увеличения совокупного спроса.

Задача 55

Банк выплачивает 10% годовых. По итогам двух лет клиент получил в виде процентов 8400 руб. прибыли. Какую сумму он для этого должен был положить на счет?
Решение:
Банк, выплачивая 10% годовых, увеличивает за 2 года сумму, положенную на счет в $1{,}1^2 = 1{,}21$ раза, т. е. на 21%, что и составляет 8400 руб.

$0{,}21x = 8400$, $x =$ **40 000 руб.**

Задача 56*

Банк выдал клиенту кредит на покупку квартиры в размере 2 млн руб. на 5 лет под 10% годовых. Выплаты по нему осуществляются равными долями ежегодно. Каков будет размер ежегодных выплат?

Решение:
Если клиент взял кредит на сумму a, то через год она с процентами составит $aR = a(1+r)$, где r – процентная ставка. После этого будет осуществлена первая выплата в размере b. Таким образом, во второй год процент будет начисляться на сумму $aR–b$. Аналогичные рассуждения верны для последующих лет. После 5 лет клиент должен полностью расплатиться с кредитом. Таким образом,

$$R(R(R(R(aR-b)-b)-b)-b)-b=0,\ aR^5-bR^4-bR^3-bR^2-bR-b=0,$$

$$b=\frac{aR^5}{R^4+R^3+R^2+R+1}.$$

Поскольку $a = 2000$ тыс. руб., $r = 0{,}1$, $R = 1{,}1$, размер ежегодных выплат составит

$$b=\frac{2000*1{,}1^5}{1{,}1^4+1{,}1^3+1{,}1^2+1{,}1+1}=\mathbf{527{,}6\ тыс.\ руб.}$$

Задача 57

Минимальная потребительская корзина в Испании стоит 300 евро. Сколько стоит эквивалентная корзина в России, если номинальный обменный курс равен 40 руб./евро, а реальный обменный курс (величина, показывающая, во сколько раз цены в рассматриваемой стране меньше, чем в США) для Испании равен 1,5, а для России равен 1,8?

Решение:
Эквивалентная потребительская корзина в США будет стоить 300*1,5 = 450 евро, а в России 450/1,8 = 250 евро. Переведем сумму по курсу и получим 250*40 = **10000 руб.**

7. Другие задачи

Задача 58

«АвтоВАЗ» выпустил 3 новых модели автомобиля: «Калина», «Камли» и «Лав-4», которые эксперты оценили по следующим четырем характеристикам: дизайн, комфорт, проходимость и цена.

	Дизайн (Д)	**Комфорт (К)**	**Проходимость (П)**	**Цена (Ц)**
«Калина»	3	3	4	5
«Камли»	4	5	3	4
«Лав-4»	5	4	5	3

1. Проранжировать автомобили, используя критерий Д+К+П+Ц.
2. Предложить критерий, в соответствии с которым «Калина» окажется на первом месте, «Лав-4» – на втором, а «Камли» – на третьем. Все 4 характеристики должны быть учтены в критерии с положительными весами.

Решение:
1. В соответствии с предложенным критерием Д+К+П+Ц **«Калина» набирает 3+3+4+5 = 15 баллов** и занимает 3-е место, **«Камли» – 4+5+3+4 = 16 баллов** (2-е место), а **«Лав-4» – 5+4+5+3 = 17 баллов** (1-е место).
2. Чтобы «Калина» вышла на 1-е место, важнейшим показателем должна быть цена, чтобы «Камли» оказалась на последнем месте, больший вес должен быть и у проходимости. Например, **Д+К+2П+3Ц**. «Калина»: 3+3+2*4+3*5 = 29 (1-е место), «Лав-4»: 5+4+2*5+3*3 = 28 (2-е место), «Камли»: 4+5+2*3+3*4 = 27 (3-е место).

Задача 59

Акции некоторой фирмы в понедельник, среду и пятницу росли на 10%, а во вторник и четверг падали на 10%. В какой момент недели их курс был максимальным?

Решение:

К вечеру в понедельник курс акций вырос на 10% и достиг своего максимального значения. Далее дважды акции сначала падали на 10%, а потом росли на 10%, итогом чего было их двукратное падение на 1% (0,9*1,1=0,99).

Задача 60

Три эксперта оценивают эффективность трех инвестиционных проектов A, B и C в целых баллах от 1 до 10. Инвестор делает свой выбор на основе среднего результата. Экспертами выставлены следующие баллы:

	A	**B**	**C**
I эксперт	6	5	3
II эксперт	3	2	4
III эксперт		6	2

Третий эксперт еще не выставил оценку проекту A.

1. Может ли он вывести проект A на первое место? Каким образом?
2. Может ли он сделать проект A наихудшим? Каким образом?
3. Изменится ли что-то, если он считает наилучшим проект B и хочет остаться честным? Ответ пояснить.

Решение:

1. Средние баллы, полученные проектами B и C, составляют соответственно $(5+2+6)/3=13/3\approx 4{,}3$ и $(3+4+2)/3=9/3=3$. Если третий эксперт поставит любой балл от 5 и выше (до 10 включительно), средняя оценка проекта A будет не меньше $(6+3+5)/3=14/3\approx 4{,}7$, что **позволит ему занять первое место**.
2. **Сделать проект A наихудшим невозможно**. Даже поставив проекту A самую низкую возможную оценку – 1, третий эксперт выведет его на второе место со средним баллом $(6+3+1)/3=10/3\approx 3{,}3$.
3. **Выводы для последней ситуации остаются прежними**. Она отличается только тем, что у третьего эксперта остается единственная возможность: поставить проекту A 5 баллов – меньше, чем проекту B, но достаточно для первого места. 4 балла позволят осуществить дележ первого места, а меньший балл оставит проект A вторым.

Задача 61*

Транспортная компания планирует выпустить проездные на маршрутки и автобусы. Есть 3 равные по численности категории населения: первая на маршрутках ездит чаще, и готова за проезд на них платить до 450 руб. в месяц, а за автобус – не более 150 руб. Вторая, напротив, чаще пользуется автобусом, соответственно, готова платить за него 400 руб. против 200 за маршрутку. Третья – на автобусах не ездит в принципе (не готова платить ни рубля), а за маршруточный проездной заплатит до 550 руб. Какие цены на проездные должна установить компания для максимизации прибыли? Должна ли она выпускать единый проездной на оба вида транспорта?

Решение:
Транспортная компания может изъять у населения все деньги, которые они готовы заплатить. Для этого нужно выпустить **единый проездной стоимостью 600 руб. и маршруточный проездной стоимостью 550 руб.** Проездной на автобус либо не нужно выпускать вообще, либо он должен стоить более 400 руб. В этом случае первые 2 группы приобретут единый проездной (450+150 = 200+400 = 600), а третья группа – маршруточный.

Задача 62*

Цена выбранной модели автомобиля равномерно распределена в диапазоне от 360 до 400 тыс. руб. Изучение очередного автомобиля на предмет приобретения и торговлю с продавцом покупатель оценивает в 400 руб. Стратегия покупателя следующая: он определяет, сколько автомобилей стоит посмотреть, смотрит их и покупает самый дешевый из вариантов. Определить оптимальное количество просмотренных автомобилей и оценку стоимости купленного варианта.

Решение:
Вероятность того, что случайно выбранный автомобиль будет стоить больше $p \in [360; 400]$, составляет $(400-p)/(400-360) = (400-p)/40 = 10 - p/40$. Вероятность того, что все n случайно выбранных автомобилей будут стоить дороже p, равна $(10-p/40)^n$. Соответственно, $F(p) = 1-(10-p/40)^n$ – вероятность того, что хотя бы один из n автомобилей будет дешевле p.

Математическое ожидание цены купленного автомобиля в зависимости от числа раундов поиска n равно

$$Mp(n) = \int_{p=360}^{400} pf(p)dp = \int_{p=360}^{400} pdF(p) = pF(p)\Big|_{p=360}^{400} - \int_{p=360}^{400} F(p)dp =$$

$$= p\left(1-\left(10-\frac{p}{40}\right)^n\right)\Bigg|_{p=360}^{400} - \int_{p=360}^{400}\left(1-\left(10-\frac{p}{40}\right)^n\right)dp =$$

$$= \left(p - p\left(10-\frac{p}{40}\right)^n - p\right)\Bigg|_{p=360}^{400} + 40\int_{p=360}^{400}\left(10-\frac{p}{40}\right)^n d\left(\frac{p}{40}\right) =$$

$$= \left(-p\left(10-\frac{p}{40}\right)^n - 40\left(10-\frac{p}{40}\right)^{n+1} \Big/ (n+1)\right)\Bigg|_{p=360}^{400} = 360 + 40/(n+1).$$

Издержки складываются из двух составляющих: цены автомобиля и издержек поиска, равных $0{,}4n$. Найдем, при каком значении n они будут минимальны:

$$360 + 40/(n+1) + 0{,}4n \to \min_n, \quad -40\big/(n+1)^2 + 0{,}4 = 0, \quad n = \sqrt{40/0{,}4} - 1 = 9.$$

Таким образом, покупателю необходимо посмотреть **9 автомобилей**, затратив на это 400*9 = **3600 руб.** В результате осмотра удастся найти автомобиль с ожидаемой ценой p = 360 + 40/10 = **364 тыс. руб.**

Оглавление

ДОБРО ПОЖАЛОВАТЬ
в Институт математики, экономики и информатики
Иркутского государственного университета!

СЕГОДНЯ ИМЭИ – ЭТО:
13 кафедр, 4 специальности и 17 специализаций, 8 компьютерных классов, центр информационной безопасности, студенческий центр информационных технологий «Unicom», лингвистический центр. Функционируют два учебно-научных комплекса ИМЭИ – Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ИМЭИ – Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН.

В ИМЭИ работают 23 доктора наук, профессора и 67 кандидатов наук, доцентов. В том числе: 1 член-корреспондент РАН, 2 члена РАЕН, 2 члена-корреспондента АН высшей школы, 7 членов Академии нелинейных наук, 1 заслуженный работник высшей школы РФ, 7 почетных работников высшего образования РФ.

Среди преподавателей ИМЭИ много совместителей. Это лучшие специалисты города в областях математики, экономики, компьютерных технологий. Их участие в учебном процессе обеспечивает более качественную подготовку студентов, как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

Специальность: «Математические методы в экономике»
(обучение 5 лет: очное и заочное, квалификация «экономист-математик»)

Выпускник данной специальности приобретает следующие знания и навыки:
- математическое моделирование, качественный и количественный анализ экономических процессов и объектов на микро- и макроуровнях;
- эффективное применение современных информационных технологий в экономической деятельности;
- управление инвестициями и бизнес-планирование.

Наши выпускники работают на крупных предприятиях и в известных компаниях, занимаются финансово-банковской деятельностью, служат в государственных и муниципальных органах управления.

Приглашаем юношей и девушек, неравнодушных к математике, экономике и информационным технологиям, учиться у нас!

664003, Иркутск, Бульвар Гагарина, 20
Телефоны для справок: (3952) 24-22-14, 24-22-28
http://math.isu.ru