

На правах рукописи

ФИЛАТОВ Александр Юрьевич

РАЗВИТИЕ АЛГОРИТМОВ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К СИСТЕМАМ НЕРАВЕНСТВ

05.13.18 - математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Иркутск - 2001

Работа выполнена в Институте систем энергетики им.Л.А.Мелентьева  
СО РАН

**Научный руководитель:**

доктор технических наук,  
профессор Зоркальцев В.И.

**Официальные оппоненты:**

доктор физико-математических наук,  
профессор Стрекаловский А.С.;  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Тарасенко Н.В.

**Ведущая организация:**

Институт математики и механики  
УрО РАН

Защита диссертации состоится 28 декабря 2001 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.074.01 в Иркутском государственном университете по адресу: 664003, г.Иркутск. бульвар Гагарина, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Иркутского государственного университета (бульвар Гагарина, 24)

Автореферат разослан 27 ноября 2001 г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета, доцент

Бельтюков Н.Б.

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

При решении многих задач из различных прикладных областей широкое применение находят методы линейной оптимизации. В частности, к задачам линейного программирования и тесно связанным с ними системам линейных уравнений и неравенств сводятся многие существенно нелинейные модели, при реализации которых используется итеративная линеаризация.

Важно отметить российский приоритет в теории оптимизации в целом и в теории линейной оптимизации в частности. Зарождение линейного программирования связано с именем Л.В.Канторовича, а фундаментальные работы по линейным неравенствам были выполнены С.Н.Черниковым. Среди других лидеров теории оптимизации в России отметим Н.Н.Моисеева и Б.Т.Поляка (Москва), И.И.Еремина (Екатеринбург), В.А.Булавского и В.Т.Дементьева (Новосибирск), О.В.Васильева и В.П.Булатова (Иркутск). Крупный вклад в развитие методов оптимизации был внесен представителями украинской и белорусской школ Б.Н.Пшеничным, Н.З.Шором, Р.Габасовым, Ф.М.Кирилловой и другими. Среди зарубежных исследователей, заложивших фундамент современной теории оптимизации, следует выделить Дж.фон Неймана, Дж. Данцига, Г.Куна и А.Таккера.

Существует большое количество методов решения задач линейного программирования. Одним из активно развивающихся их направлений являются алгоритмы внутренних точек, первый из которых был опубликован в 1967 году И.И.Дикиным. До середины 80-х годов развитие алгоритмов внутренних точек осуществлялось исключительно в работах российских ученых, среди которых выделим Ю.Г. Евтушенко, В.И.Зоркальцева и В.Г.Жадана.

Повышенный интерес к данному направлению (результатом которого стали более 2000 опубликованных статей) в мировой науке возник вслед за созданием в 1984 году Н.Кармаркаром первого алгоритма внутренних точек, обладающего полиномиальными оценками максимального объема вычислений, необходимых для решения задачи. При этом основная масса работ была посвящена изложению новых модификаций алгоритмов и теоретических результатов по их обоснованию. В связи с огромным числом разработанных алгоритмов особенно важную роль начинают играть экспериментальные исследования. Они позволяют провести сопоставление алгоритмов и выбрать их наиболее перспективные, с учетом специфики конкретных типов задач, варианты.

Эксперименты также создают основу для выбора направлений дальнейших теоретических исследований алгоритмов внутренних точек, в том числе, полиномиальных. Алгоритмы с гарантированными теоретическими оценками объема вычислений могут оказаться особенно важными для решения задач управления объектами в темпе реального времени, когда заранее необходимо знать максимальное время получения решения с требуемой точностью. В то же время в полиномиальных алгоритмах оценка строится на основе наихуд-

шего возможного случая, вероятность реализации которого на практике невелика. Известно, что многие полиномиальные алгоритмы малопригодны для решения практических задач, то есть наличие полиномиальных оценок максимального объема вычислений не означает хорошей работы алгоритмов на практике. Поэтому актуальной является разработка специальных процедур, позволяющих ускорить вычислительный процесс и сделать полиномиальные алгоритмы более привлекательными для практического использования.

Одной из серьезных проблем, требующих решения, является также инициализация алгоритма. Это вызвано тем, что для многих полиномиальных алгоритмов требуется стартовое приближение, обладающее особыми свойствами, а процедуры его автоматического формирования базируются на идее сведения исходной задачи к расширенной, малопривлекательной с вычислительной точки зрения, задаче специального вида.

Алгоритмы внутренних точек допускают множество вариантов в зависимости от вида решаемой задачи. В частности, в диссертационной работе особое внимание уделяется проблеме решения алгоритмами внутренних точек систем линейных неравенств с двухсторонними ограничениями на переменные. Подобные интервальные ограничения могут быть вызваны как технически возможными пределами изменения параметров системы, так и искусственными ограничениями на ряд показателей. Проблема решения систем линейных уравнений и неравенств с двухсторонними ограничениями на переменные является базовой при применении методов последовательной линеаризации к нелинейным моделям. В то же время, до сих пор в алгоритмах слабо учитывались полезные свойства таких систем, позволяющие, в частности, решить проблему быстрой идентификации несовместности ограничений.

### **Цели работы**

1. Программная реализация, экспериментальное исследование и сравнительный анализ вариантов алгоритмов внутренних точек для решения задач линейного программирования. Выявление наиболее перспективных направлений развития алгоритмов.

2. Развитие теоретических исследований алгоритмов внутренних точек на задачах линейного программирования. Разработка и теоретическое обоснование новых алгоритмов, обладающих расширенными возможностями, в частности, не предъявляющих жестких требований к стартовому приближению.

3. Создание, программная реализация и экспериментальное исследование специальных модификаций алгоритмов внутренних точек для решения систем линейных и (на базе итеративной линеаризации) нелинейных уравнений и неравенств с двухсторонними ограничениями на переменные, позволяющих повысить эффективность вычислительного процесса. Приложение разработанных алгоритмов к задаче определения допустимых режимов электроэнергетических систем (ЭЭС).

## **Методы исследований**

Исследования базируются на теории двойственности в линейном программировании, вариантах теоремы об альтернативных неравенствах Фаркаша, методах логарифмических штрафных функций и методах вычислительной математики.

## **Основные результаты, составляющие научную новизну работы и выносимые на защиту**

1. Разработан и теоретически обоснован новый класс полиномиальных алгоритмов решения задач линейного программирования - алгоритмы оптимизации в конусе “скошенного пути”, - являющийся обобщением и развитием алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути. Ключевой особенностью предложенных алгоритмов является то, что вычислительный процесс в них может начинаться с любых относительно внутренних точек множеств допустимых решений.

2. В результате экспериментального исследования показано, что разработанные модификации полиномиальных алгоритмов для решения задач линейного программирования близки по скорости к лучшим из использующихся на практике алгоритмов.

3. Для решения систем линейных уравнений и неравенств с двухсторонними ограничениями на переменные разработаны специальные модификации алгоритмов внутренних точек, учитывающие специфику данной задачи. На основе проведенных экспериментов показана их высокая эффективность, в частности, при идентификации случая несовместности.

## **Практическая ценность**

Разработанные алгоритмы могут быть использованы при реализации многих технических, экономических, экологических и других моделей, где возникает необходимость решения задач линейного программирования и систем линейных неравенств. Сюда относится и широкий класс существенно нелинейных моделей, при реализации которых применяется итеративная линеаризация. К настоящему времени предложенные в диссертации алгоритмы нашли непосредственное практическое применение на задаче определения допустимых режимов ЭЭС и внедрены в разработанный в ИСЭМ СО РАН программно-вычислительный комплекс “СДО” управления режимами ЭЭС.

## **Апробация работы**

Исследования выполнялись в рамках грантов РФФИ №97-01-00859 (“Разработка и теоретические исследования проективных алгоритмов оптимизации с приложением в задачах энергетики”) и №00-01-00530 (“Развитие алгоритмов внутренних точек и их применение в задачах энергетики”). Основные результаты опубликованы в 23 научных работах, в том числе, в 14 статьях, а также докладывались и обсуждались на конференциях научной молодежи ИСЭМ СО РАН (1997-2000), XI и XII международных

Байкальских школах-семинарах “Методы оптимизации и их приложения” (Иркутск, 1998, 2001), международных конференциях “Дискретный анализ и исследование операций” (Новосибирск, 1998, 2000), международной конференции “Математическое программирование и приложения” (Екатеринбург, 1999), международной конференции “Распределенные системы: оптимизация и приложения” (Екатеринбург, 2000), на семинарах ИСЭМ СО РАН и ИДСТУ СО РАН.

### Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, разбитых на 9 разделов, заключения и списка литературы из 75 наименований. Общий объем составляет 123 страницы текста.

### Содержание работы

Первая глава посвящена обзору алгоритмов внутренних точек в линейном программировании. Их название связано с тем, что, в отличие от симплекс-метода, перебирающего угловые точки многогранника допустимых решений, вычислительный процесс в алгоритмах внутренних точек происходит в относительной внутренности допустимого множества.

Рассматривается пара взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}, \quad X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in U}, \quad U = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{R}^m: \mathbf{g}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{A}$  - матрица размерности  $m \times n$ ,  $rank \mathbf{A} = m$ .

Пара задач (1)-(2) равносильна следующей самосопряженной задаче:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X, \mathbf{u} \in U}. \quad (3)$$

Основными классами алгоритмов внутренних точек являются аффинно-масштабирующие алгоритмы, алгоритмы уменьшения потенциала и алгоритмы центрального пути. Исторически первыми среди них являются аффинно-масштабирующие алгоритмы, вычислительный процесс в которых начинается с любого стартового приближения  $\mathbf{x}^1 > \mathbf{0}$ . На каждой итерации ищется вектор невязок балансовых ограничений-равенств

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k.$$

Итеративный переход осуществляется по правилу

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda^k \Delta \mathbf{x}^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $\Delta \mathbf{x}^k$  - направление корректировки, вычисляемое как решение задачи

$$\mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta x_j^2 / d_j^k \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n}, \quad \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{r}^k, \quad (4)$$

а  $\lambda^k$  - шаг корректировки, задаваемый из соображений невыхода переменных

прямой задачи за пределы внутренности допустимой области:

$$\lambda^k = \gamma \min_{j: \Delta x_j^k < 0} \left( -x_j^k / \Delta x_j^k \right).$$

Здесь  $\gamma$  - заданная константа из интервала (0;1). Отметим также, что на фазе ввода в допустимую область (то есть при  $\mathbf{r}^k \neq \mathbf{0}$ ) шаг  $\lambda^k$  должен ограничиваться сверху единицей.

Среди способов выбора весовых коэффициентов  $d_j^k$  выделим следующие:

$$1) d_j^k = (x_j^k)^2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$2) d_j^k = x_j^k / \max \left\{ \varepsilon, g_j(\mathbf{u}^{k-1}) \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0. \quad (6)$$

Правило (6) было введено в целях уменьшения негативного влияния погрешностей вычислений, особенно в финальной стадии вычислительного процесса, и увеличения численной устойчивости алгоритма.

В процессе решения вспомогательной задачи (4) по итерациям вырабатываются векторы  $\mathbf{u}^k$  множителей Лагранжа ограничений-равенств, которые, хотя и немонотонно, сходятся к оптимальному решению задачи (2). Причем имеются теоретические результаты, показывающие, что двойственные оценки  $\mathbf{u}^k$  сходятся быстрее, чем переменные прямой задачи. В этой связи особенный интерес представляет использование двойственных алгоритмов, в которых последовательность приближений  $\mathbf{x}^k$  быстрее, хотя и немонотонно, сходится к оптимальному решению задачи (1). Одной из целей работы можно считать практическую проверку того, действительно ли двойственные аффинно-масштабирующие алгоритмы являются более эффективными, чем прямые, в целях получения решения прямой задачи.

Наиболее перспективным классом полиномиальных алгоритмов внутренних точек являются алгоритмы центрального пути. Они строятся на основе идеи К.Фриша включения в целевую функцию штрафных слагаемых в виде логарифма ограничений-неравенств с параметром, монотонно уменьшающимся до нуля. Точным решением задачи минимизации логарифмической барьерной функции на множестве допустимых решений пары задач (1)-(2)

$$f_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{u} - \mu \sum_{j=1}^n \ln(x_j g_j(\mathbf{u})) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}}$$

при любом  $\mu > 0$  является пара векторов  $\mathbf{x}(\mu), \mathbf{u}(\mu)$ , для которой все компоненты вектора невязки двойственности равны между собой:

$$x_j(\mu) g_j(\mathbf{u}(\mu)) = \mu, \quad j = 1, \dots, n.$$

Множество пар векторов  $\mathbf{x}(\mu), \mathbf{u}(\mu)$  при всех  $\mu > 0$  образует центральный путь.

Суть алгоритмов центрального пути состоит в том, что вырабатываются последовательности пар векторов  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$  и

соответствующих значений  $\mu^k$ , для которых при заданном  $\theta \in (0;1)$  справедливы условия

$$\mathbf{x}^k \in \mathbf{X}, \mathbf{u}^k \in \mathbf{U}, \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu^k} \left( \mu^k - x_j^k g_j(\mathbf{u}^k) \right)^2 \leq \theta \mu^k. \quad (7)$$

При этом для некоторого  $\beta > 0$  выполняется неравенство

$$\mu^{k+1} \leq \left( 1 - \beta/\sqrt{n} \right) \mu^k,$$

что обеспечивает получение решения пары задач (1)-(2) за  $O(\sqrt{n}L)$  итераций. Здесь и далее  $L$  - объем входных данных задачи.

Классическими для данного класса являются алгоритм М.Коджимы, Ш.Мицуно и А.Йошиса, в котором значение  $\beta$  может равняться 0.125, и алгоритм, разработанный Р.Монтейро и И.Адлером, где  $\beta = 0.35$ .

В отличие от аффинно-масштабирующих алгоритмов, для алгоритмов центрального пути требуется начальное приближение, удовлетворяющее при  $k=1$  условиям (7). Рассмотренные в первой главе процедуры его автоматического формирования базируются на идее сведения исходной задачи к расширенной, малопривлекательной с вычислительной точки зрения, задаче специального вида. В связи с этим важной целью является разработка алгоритмов, не предъявляющих жестких требований к стартовому приближению.

Основные теоретические результаты диссертационной работы заключены **во второй главе**, где предлагается и обосновывается класс алгоритмов оптимизации в конусе “скошенного пути”, развивающий и обобщающий идеи алгоритмов центрального пути. Ключевой особенностью предлагаемых алгоритмов является то, что вычислительный процесс в них может начинаться с любых относительно внутренних точек множеств допустимых решений задач (1)-(2). Идейно алгоритмы скошенного пути наиболее близки к введенным Б.Янсенем, К.Русом, Т.Терлаки и Ж.-Ф. Виалом методам “следования цели”.

**Предположение 1.** Будем считать, что задачи (1)-(2) имеют допустимые векторы, для которых все ограничения-неравенства выполняются в строгой форме, то есть имеются такие векторы  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{u} \in \mathbf{U}$ , что

$$x_j > 0, g_j(\mathbf{u}) > 0, j = 1, \dots, n.$$

**Теорема 1.** Пусть для задач (1)-(2) выполняется предположение 1. Тогда для любого заданного вектора  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$  существует и единственна такая пара векторов  $\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mathbf{t})$ , что выполняются условия

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) \in \mathbf{X}, \mathbf{u}(\mathbf{t}) \in \mathbf{U}, x_j(\mathbf{t})g_j(\mathbf{u}(\mathbf{t})) = t_j, j = 1, \dots, n.$$

Скошенным путем, иницируемым вектором  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ , назовем множество пар векторов  $\mathbf{x}(\mu\mathbf{t}), \mathbf{u}(\mu\mathbf{t})$  при всех  $\mu > 0$ . В частности, вектор  $\mathbf{t} = \mathbf{e}$  (равно как и  $\mathbf{t} = \lambda\mathbf{e}$  при любом  $\lambda > 0$ ) иницирует путь аналитических центров.

Каждый скошенный путь характеризуется коэффициентом скошенности

$$\gamma = \bar{t}/t_{\min},$$

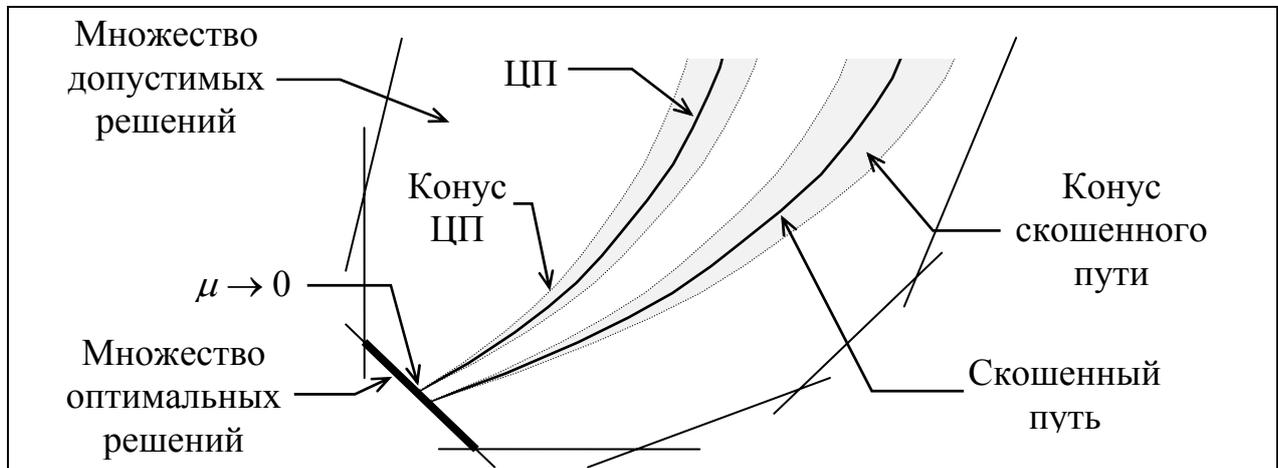
где  $\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j$ ,  $t_{\min} = \min_{j=1, \dots, n} t_j$ .

Поскольку для пути аналитических центров все компоненты иницирующего вектора равны между собой, его коэффициент скошенности равен единице. Для всех остальных скошенных путей он больше единицы.

Все предлагаемые алгоритмы вырабатывают последовательности пар векторов  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$  и соответствующих значений  $\mu^k$ , для которых при заданном  $\theta \in (0;1)$  выполняются условия принадлежности конусу скошенного пути:

$$\mathbf{x}^k \in \mathbf{X}, \mathbf{u}^k \in \mathbf{U}, \Phi_2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mu^k) \equiv \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu^k t_j} \left( \mu^k t_j - x_j^k g_j(\mathbf{u}^k) \right)^2 \leq \theta \mu^k t_{\min}. \quad (8)$$

Схематически траекторию алгоритмов скошенного пути покажем на рисунке:



Идейной основой прямых алгоритмов скошенного пути является приближенное решение методом Ньютона задачи

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{j=1}^n t_j \ln x_j \rightarrow \min, \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Двойственные - строятся как процедуры решения методом Ньютона задачи

$$\mathbf{b}^T \mathbf{u} + \mu \sum_{j=1}^n t_j \ln g_j \rightarrow \max, \quad \mathbf{g} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{c}.$$

Прямо-двойственные - объединяют в себе оба подхода. Отметим, что данные задачи связаны по условиям оптимальности: множители Лагранжа ограничений одной из них являются оптимальными значениями переменных другой.

В диссертационной работе предлагается и обосновывается несколько вариантов алгоритмов, являющихся развитием и обобщением разработанных В.И.Зоркальцевым алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути. В простейшем из них итеративный переход осуществляется по правилам

$$\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m} \Phi_2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}, \mu^k) = \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{A}^T \right) \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{c} - \mathbf{b} \right), \quad (9)$$

$$x_j^{k+1} = 2x_j^k - \frac{1}{\mu^k t_j} (x_j^k)^2 g_j(\mathbf{u}^{k+1}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$\mu^{k+1} = \left( 1 - \frac{\sqrt{\theta(1-\theta)n\gamma - \theta}}{n\gamma - \theta} \right) \mu^k. \quad (11)$$

Здесь и далее  $\mathbf{X}_k = \text{diag}\{x_j^k\}$ ,  $\mathbf{M}_k = \text{diag}\{\mu^k t_j\}$ .

**Теорема 2.** Для алгоритма (9)-(11) из выполнения условий (8) на первой итерации следует выполнение условий (8) на последующих итерациях.

Полиномиальность алгоритма здесь обеспечивается итеративным уменьшением параметра  $\mu$  в соответствии с (11).

Алгоритм (9)-(11), обозначаемый далее как алгоритм А, действует в точном соответствии с теоретической оценкой, поэтому с ним, как с эталоном, можно сопоставлять последующие варианты алгоритмов с целью подтверждения эффективности используемых в них процедур, ускоряющих сходимость.

Начиная с алгоритма С, параметр скошенного пути  $\mu$  будет гарантированно уменьшаться на каждой итерации  $k > 1$  в соответствии с неравенством

$$\mu^{k+1} \leq \left( 1 - \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\gamma - \theta}} \right) \mu^k. \quad (12)$$

Поскольку при любых натуральных  $n$  и  $\theta \in (0;1)$

$$1 - \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\gamma - \theta}} < 1 - \sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n\gamma}} < 1 - \frac{\sqrt{\theta(1-\theta)n\gamma - \theta}}{n\gamma - \theta},$$

последующие алгоритмы сходятся гарантированно быстрее, чем алгоритм А. Выражение, стоящее в центральной части неравенства, можно использовать в качестве оценки гарантированной скорости сходимости алгоритмов. Наилучшее значение оценки достигается, когда максимально значение величины  $\theta(1-\theta)$ , то есть при  $\theta = 0.5$ . В этом случае

$$\sqrt{\theta(1-\theta)}/\sqrt{n\gamma} = 0.5/\sqrt{n\gamma}.$$

Отсюда получаем, что в предлагаемых алгоритмах уменьшение параметра скошенного пути может осуществляться в соответствии с неравенством

$$\mu^{k+1} < \left( 1 - 0.5/\sqrt{n\gamma} \right) \mu^k.$$

Это как превосходит оценки, выполняющиеся для алгоритмов следования цели, так и, в частном случае при  $\gamma = 1$ , является наилучшей оценкой для класса алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути.

Усовершенствование алгоритмов связано с введением параметрических функций. Идея алгоритма С состоит в том, что закрепляется вектор  $\mathbf{x}^k$  переменных прямой задачи и вводится линейная вектор-функция

$$\mathbf{u}^k(\lambda) = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m} \Phi_2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}, \lambda \mu^k) = \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \left( \mathbf{A} \mathbf{X}_k^2 \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{c} - \lambda \mathbf{b} \right). \quad (13)$$

$\lambda^k$  находится как решение задачи

$$\lambda \rightarrow \min_{\lambda \geq 0}, \quad \Phi_2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k(\lambda), \lambda \mu^k) \leq \theta \lambda \mu^k t_{\min}. \quad (14)$$

Итеративный переход осуществляется по формулам

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k(\lambda^k), \quad \mu^{k+1} = \lambda^k \mu^k, \quad x_j^{k+1} = 2x_j^k - \frac{1}{\mu^{k+1} t_j} (x_j^k)^2 g_j(\mathbf{u}^{k+1}). \quad (15)$$

**Теорема 3.** Для алгоритма (13)-(15) из выполнения условий (8) на первой итерации следует выполнение условий (8) на последующих итерациях. При  $k > 1$  выполняется неравенство (12).

Алгоритм D является двойственным аналогом алгоритма C. Вычислительный процесс в нем осуществляется по правилам

$$\mathbf{x}^k(\lambda) = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}} \Phi_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k, \lambda \mu^k) = \mathbf{G}_k^{-2} \mathbf{T} \mathbf{A}^T \mathbf{r}^k(\lambda) + \lambda \mu^k \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{t}. \quad (16)$$

где

$$\mathbf{r}^k(\lambda) = (\mathbf{A} \mathbf{G}_k^{-2} \mathbf{T} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{b} - \lambda \mu^k \mathbf{A} \mathbf{G}_k^{-1} \mathbf{t}), \quad \mathbf{G}_k = \text{diag}\{g_j(\mathbf{u}^k)\}, \quad \mathbf{T} = \text{diag}\{t_j\}. \quad (17)$$

$\lambda^k$  определяется как решение задачи

$$\lambda \rightarrow \min_{\lambda \geq 0}, \quad \Phi_2(\mathbf{x}^k(\lambda), \mathbf{u}^k, \lambda \mu^k) \leq \theta \lambda \mu^k t_{\min}. \quad (18)$$

После чего происходит итеративный переход:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k(\lambda^k), \quad \mu^{k+1} = \lambda^k \mu^k, \quad \mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k(\lambda^k), \quad u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{1}{\mu^{k+1}} r_i^{k+1}. \quad (19)$$

**Теорема 4.** Для алгоритма (16)-(19) из выполнения условий (8) на первой итерации следует выполнение условий (8) на последующих итерациях. При  $k > 1$  выполняется неравенство (12).

Алгоритм E объединяет в себе вычисление переменных двойственной задачи по правилам алгоритма C и вычисление переменных прямой задачи по правилам алгоритма D и может быть назван прямо-двойственным.

Алгоритмы  $C_p$ ,  $D_p$  и  $E_p$  отличаются от C, D и E использованием более высоких степеней  $p=4,8,16,\dots$  при решении вспомогательных задач нахождения величины  $\lambda^k$ . В алгоритме  $C_p$  вместо (14) решается задача

$$\lambda \rightarrow \min_{\lambda \geq 0}, \quad \Phi_p(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k(\lambda), \lambda \mu^k) \leq \theta^{p/2} \lambda^{p/2} (\mu^k)^{p/2} (t_{\min})^{p/2}, \quad (20)$$

где

$$\Phi_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu^{p/2} (t_j)^{p/2}} (\mu t_j - x_j g_j(\mathbf{u}))^p,$$

а в алгоритме  $D_p$  задача (18) заменяется на следующую:

$$\lambda \rightarrow \min_{\lambda \geq 0}, \quad \Phi_p(\mathbf{x}^k(\lambda), \mathbf{u}^k, \lambda \mu^k) \leq \theta^{p/2} \lambda^{p/2} (\mu^k)^{p/2} (t_{\min})^{p/2}. \quad (21)$$

Особый интерес представляет использование  $p \rightarrow \infty$ .

Было получено теоретическое обоснование алгоритмов  $C_p$ ,  $D_p$  и  $E_p$  для  $p = 4$ . В то же время алгоритмы  $C_p$ ,  $D_p$  и  $E_p$  при  $p > 4$ , как показало экспе-

риментальное исследование, успешно решали практические задачи, демонстрируя при этом наивысшую среди всех алгоритмов скорость сходимости.

Важным является практическое использование полиномиальных алгоритмов, в частности, предложенных выше. Поэтому интересно сравнить их по скорости с вариантами аффинно-масштабирующего метода, не являющегося полиномиальным, но хорошо зарекомендовавшего себя на практике. Рассматриваемые два варианта  $F_1$  и  $F_2$  построены на основе весовых коэффициентов, формируемых соответственно по правилам (5) и (6).

Все алгоритмы, кроме прямо-двойственных, имеют приблизительно одинаковый объем вычислений на каждой итерации - наибольшую сложность представляет обращение симметричной положительно определенной матрицы размерности  $m \times m$ . Поэтому данные о числе итераций могут быть использованы в качестве сравнительной характеристики объема вычислений. На каждой итерации прямо-двойственных алгоритмов используется два обращения матрицы. Следовательно, итерацию этих алгоритмов можно приближенно считать в два раза более трудоемкой.

Итеративный процесс для всех алгоритмов начинался с приближения, полученного в соответствии с процедурой инициализации, изложенной Р.Монтейро и И.Адлером, а завершался с достижением невязкой двойственности  $\sum x_j g_j(\mathbf{u})$  заданного критического значения. Поскольку процедура инициализации предоставляет точку центрального пути, а также в целях нивелирования влияния побочных факторов, сопоставление проводилось на алгоритмах центрального пути - частном случае предложенных. В то же время выявленные тенденции можно распространить и на весь класс алгоритмов скошенного пути.

Основные результаты эксперимента сведем в таблице 1. Величина  $\theta$  для алгоритма А принималась равной 0.5. Для остальных алгоритмов через знак дроби запишем данные, соответствующие  $\theta = 0.5$  и  $\theta = 0.9$ . Для задачи 4 размерности  $100 \times 200$  значение  $\theta$  равнялось 0.9 для всех алгоритмов, кроме А.

**Таблица 1. Число итераций, необходимое для решения задач различными алгоритмами**

Алг.	Задача 1 $2 \times 4$	Задача 2 $3 \times 6$	Данцига $6 \times 12$	Задача 3 $8 \times 18$	Данцига $19 \times 38$	Задача 4 $19 \times 38$	Задача 4 $100 \times 200$
А	90	218	278	258	730	805	2174
С	28/20	50/37	85/63	82/59	260/189	240/170	501
Е	16/12	42/33	57/44	55/43	157/120	123/95	193
$C_4$	25/17	45/29	62/45	50/42	119/101	110/79	142
$E_4$	14/11	34/27	39/30	34/26	82/64	79/61	95
$C_{16}$	24/12	44/29	53/39	44/33	99/75	84/53	74
$C_\infty$	23/12	43/26	52/39	41/31	93/73	78/49	63
$F_1$	16	35	36	30	62	66	84
$F_2$	16	37	40	33	69	68	100

Второй эксперимент посвящен непосредственной проверке алгоритмов скошенного пути. Сопоставление проводилось на двух вариантах алгоритма  $S_4$ , наиболее эффективного из обоснованных. В первом из них формировалась расширенная задача и осуществлялся процесс оптимизации в конусе центрального пути, а во втором - находилась любая допустимая точка и начинался процесс оптимизации в конусе скошенного пути.

Поскольку меньшие значения коэффициента скошенности способствуют ускорению сходимости вычислительного процесса, предлагается следующая процедура: на каждой итерации после получения новых приближений  $\mathbf{x}^k$  и  $\mathbf{u}^k$ , а также нового значения  $\mu^k$  решается задача

$$\Delta \rightarrow \max, \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tilde{t}_j(\Delta)} \left( \tilde{t}_j(\Delta) - x_j^k g_j(\mathbf{u}^k) \right)^2 \leq \theta(\mu^k t_{\min} + \Delta),$$

$$\tilde{t}_j(\Delta) = \max \left\{ \mu^k t_{\min} + \Delta, \min \left\{ \mu^k t_j, x_j^k g_j(\mathbf{u}^k) \right\} \right\},$$

после чего определяется новый иницирующий вектор  $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{t}}(\Delta)$ . Это процедура обеспечивает быстрое сокращение коэффициента скошенности по итерациям.

Для тестирования были сгенерированы наборы случайных задач различной размерности (по 5 каждой). В таблицу 2 внесем среднее количество итераций, потребовавшееся методам для их решения. Также для сведения приведем среднее значение коэффициента скошенности в стартовой точке, а также среднее его значение на 40-итерации.

**Таблица 2. Среднее число итераций, необходимое для решения случайно сгенерированных задач**

Алг./ размерности	20 × 40	50 × 100	100 × 200	300 × 1000
Центрального пути	63.6	112.8		
Скошенного пути	64.6	84.0	98.8	194.0
Начальное. знач. $\gamma$	688.59136	4063.85557	7256.78106	14601.30272
Знач. $\gamma$ на 40-итер.	1.04021	2.00803	2.97036	21.91051

**В третьей главе** рассмотрены специальные модификации алгоритмов внутренних точек для решения систем линейных уравнений и неравенств с интервальными ограничениями на переменные  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y} \geq \underline{\mathbf{y}}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  - заданная матрица,  $\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$  и  $\bar{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^m$  - заданные векторы ограничений, причем  $\bar{\mathbf{x}} > \underline{\mathbf{x}}$ ,  $\bar{\mathbf{y}} > \underline{\mathbf{y}}$ . Необходимо отыскать допустимое решение системы (22), либо максимально быстро идентифицировать ее несовместность.

Система (22) с помощью введения дополнительной переменной сводится к задаче линейного программирования. Пусть имеется стартовая точка  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$ ,

удовлетворяющая в строгой форме ограничениям-неравенствам, такая, что  $\mathbf{Ax}^1 \neq \mathbf{y}^1$ . Вводится вектор невязок ограничений-равенств

$$\mathbf{r} = \mathbf{y}^1 - \mathbf{Ax}^1$$

и рассматривается задача линейного программирования

$$\alpha \rightarrow \min, \quad \mathbf{Ax} - \mathbf{y} + \alpha \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{y} \geq \underline{\mathbf{y}}, \quad \alpha \geq 0. \quad (23)$$

Несложно убедиться, что если для оптимального решения задачи (23)  $\alpha = 0$ , то соответствующая пара векторов  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  является допустимой для системы (22). Если же для оптимального решения задачи (23) значение  $\alpha$  положительно, то система (22) несовместна.

Одной из наиболее существенных проблем долгое время являлась невозможность быстрой идентификации случая несовместности ограничений системы (22). В ранее использовавшихся алгоритмах для этого требовался большой объем вычислений, сопоставимый с необходимым для получения допустимой точки в случае совместности ограничений. В то же время необходимость решения систем линейных уравнений и неравенств часто возникает при итеративной линеаризации существенно нелинейных моделей (в частности, в диссертационной работе рассматривается задача определения допустимых режимов ЭЭС). Из этого следует, что система (22) представляет собой линеаризованную подзадачу, нередко оказывающуюся несовместной по причине погрешностей линеаризации, и целесообразно не решать ее до конца, что может оказаться трудоемким процессом, а максимально быстро перейти в новую точку, где заново провести линеаризацию.

В.И.Зоркальцевым на основе теоремы Фаркаша об альтернативных неравенствах был построен и обоснован следующий критерий несовместности:

**Теорема 5.** Система уравнений и неравенств (22) несовместна в том и только в том случае, если существует вектор  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ , при котором

$$\psi(\mathbf{u}) \equiv \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}_- + \underline{\mathbf{y}}^T \mathbf{u}_+ - \bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_+ - \underline{\mathbf{x}}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u})_- > 0.$$

Здесь и далее  $(\mathbf{u}_+)_j = \max\{0, u_j\}$ ,  $(\mathbf{u}_-)_j = \min\{0, u_j\}$ .

Одной из целей работы являлось включение в алгоритмы и практическая проверка процедуры быстрой идентификации, на основе приведенного критерия, случая несовместности.

Первый способ решения системы (22) связан с аффинно-масштабирующими алгоритмами. Рассматривались их прямые ( $F_1$  и  $F_2$ ), двойственные ( $G_1$  и  $G_2$ ), а также прямо-двойственный (H) варианты. Все они были протестированы на 14 совместных и 14 несовместных задачах, полученных из моделей управления режимами ЭЭС, а также на тестовом примере. Занесем в таблицу 3 среднее количество итераций, потребовавшееся каждому алгоритму для решения задач. В скобках также укажем минимальное и максимальное число итераций, необходимых для решения отдельной задачи.

Таблица 3. Число итераций, необходимое для получения решения или идентификации несовместности аффинно-масштабирующими алгоритмами

Задачи / алгоритм	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	G <sub>1</sub>	G <sub>2</sub>	H
Совм. (30×80) – (41×80)	9.5 (3-13)	13.4 (7-17)	10.2 (6-13)	5.9 (3-8)	9.6 (4-13)
Несовм. (30×80) – (41×80)	1.6 (1-5)	1.6 (1-7)	1 (все 1)	1 (все 1)	1 (все 1)
Тест. пример (19×19)	13	8	11	6	13
Тест. пример (201×201)	19	7	16	9	17

Таблица демонстрирует практическую эффективность критерия несовместности. Несовместность обычно выявляется на первой же итерации. Особенно хорошо здесь зарекомендовали себя двойственные и прямо-двойственный алгоритмы. Также алгоритмы продемонстрировали высокие скоростные характеристики при решении совместных задач.

В то же время, как показали экспериментальные расчеты, двойственные алгоритмы при решении исходной нелинейной задачи поиска допустимых режимов ЭЭС оказались в конечном итоге менее эффективными. Основной причиной этого является наличие для прямых алгоритмов хорошего исходного приближения, в то время как двойственные алгоритмы никак не учитывают информацию с предыдущей итерации линеаризации.

Другой способ решения системы (22) связан с модификациями алгоритмов центрального пути, рассмотренных во второй главе и обретающих здесь дополнительные преимущества. Интервальные ограничения на переменные позволяют успешно решить проблему инициализации алгоритмов. Критерий несовместности также хорошо вписывается в алгоритмическую схему.

Центрируя и нормируя переменные, сведем систему (22) к следующей:

$$\mathbf{Ax} - \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad 2\mathbf{e} \geq \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad 2\mathbf{e} \geq \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (24)$$

С помощью дополнительных векторов переменных  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{q}$  перейдем от системы (24) к паре взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$\begin{array}{l} \alpha \rightarrow \min, \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{y} + \alpha \mathbf{r} = \mathbf{b}, \\ -\mathbf{x} - \mathbf{s} = -2\mathbf{e}, \\ -\mathbf{y} - \mathbf{q} = -2\mathbf{e}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \alpha \geq 0. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}^T \mathbf{u} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{v} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{w} \rightarrow \max, \\ \mathbf{g}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_2 = \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_3 = \mathbf{u} + \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_4 = \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_5 = 1 - \mathbf{r}^T \mathbf{u} \geq 0. \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{q} \\ \alpha \end{array} \right.$$

Здесь  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^1 + \mathbf{y}^1$  при некоторых  $\mathbf{x}^1 \in (\mathbf{0}; 2\mathbf{e})$ ,  $\mathbf{y}^1 \in (\mathbf{0}; 2\mathbf{e})$ . Справа от черты выписаны двойственные оценки ограничений.

Благодаря особой структуре задачи, имеется начальное приближение, являющееся точкой центрального пути:

$$\begin{array}{lll} x_j^1 = s_j^1 = 1, & j = 1, \dots, n, & y_i^1 = q_i^1 = 1, \quad i = 1, \dots, m, & \alpha^1 = 1, \\ u_i^1 = 0, & i = 1, \dots, m, & v_j^1 = 1, \quad j = 1, \dots, n, & w_i^1 = 1, \quad i = 1, \dots, m. \end{array}$$

Очевидно, что вместе с  $\mu^1 = 1$  это приближение удовлетворяет условию

$$x_j(\mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{u})_j = \mu, \quad s_j v_j = \mu, \quad y_i(\mathbf{u} + \mathbf{w})_i = \mu, \quad q_i w_i = \mu, \quad \alpha(1 - \mathbf{r}^T \mathbf{u}) = \mu.$$

Аналогично аффинно-масштабирующим алгоритмам, в вычислительную схему алгоритмов центрального пути включается следующий пункт: если на некоторой итерации выполняется условие

$$\phi(\mathbf{u}^k) \equiv \mathbf{b}^T \mathbf{u}^k + 2\mathbf{e}^T \mathbf{u}^k - 2\mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{u}^k)_+ > 0,$$

то система (24) несовместна.

Завершение вычислительного процесса в случае совместности ограничений также формализуется. На каждой итерации проверяется, нельзя ли продвигнуться вдоль направления корректировки переменных прямой задачи с шагом  $\gamma^k = -\alpha^k / \Delta \alpha^k$ , то есть нарушается ли хоть одно ограничение-неравенство в точке

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \gamma^k \Delta \mathbf{x}^k, & \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^k + \gamma^k \Delta \mathbf{s}^k, \\ \mathbf{y}^{k+1} &= \mathbf{y}^k + \gamma^k \Delta \mathbf{y}^k, & \mathbf{q}^{k+1} &= \mathbf{q}^k + \gamma^k \Delta \mathbf{q}^k. \end{aligned}$$

Если все они выполняются, то имеем допустимую точку системы (24).

Эксперименты проводились на том же наборе задач, что и при исследовании аффинно-масштабирующих алгоритмов. Критерий идентифицировал несовместность каждой из 14 несовместных задач на первой же итерации. Результаты расчетов по 14 совместным задачам сведены в таблице 4.

**Таблица 4. Число итераций, необходимое для получения решения алгоритмами центрального пути**

Алгоритм	C	C <sub>4</sub>	C <sub>16</sub>	E <sub>4</sub>	E <sub>16</sub>
<b>Число итераций</b>	16.9 (5-26)	10.1 (3-14)	8 (2-11)	7.5 (3-10)	4.8 (2-6)

Хорошие результаты, показанные алгоритмами центрального пути, в первую очередь достигнуты благодаря высокой эффективности процедуры параметризации. В связи с этим рассмотрим следующий комбинированный алгоритм, где процедура параметризации реализована в чистом виде. Вычислительный процесс в этом алгоритме начинается с произвольной пары векторов, удовлетворяющей в строгой форме ограничениям-неравенствам

$$\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{x}^1 > \underline{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{y}} > \mathbf{y}^1 > \underline{\mathbf{y}}:$$

На каждой итерации вычисляем вектор невязки ограничений-равенств

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{y}^k - \mathbf{A}\mathbf{x}^k.$$

Направление корректировки  $(\Delta \mathbf{x}^k(\lambda_x, \lambda_y), \Delta \mathbf{y}^k(\lambda_x, \lambda_y))$  является решением задачи

$$-\lambda_x \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-1} - (\mathbf{D}_k^2)^{-1} \right) \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{x})^T \left( (\mathbf{D}_k^1)^{-2} + (\mathbf{D}_k^2)^{-2} \right) \Delta \mathbf{x} - \quad (25)$$

$$-\lambda_y \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-1} - (\mathbf{D}_k^4)^{-1} \right) \Delta \mathbf{y} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{y})^T \left( (\mathbf{D}_k^3)^{-2} + (\mathbf{D}_k^4)^{-2} \right) \Delta \mathbf{y} \rightarrow \min_{\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}},$$

$$\mathbf{A}\Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{r}^k. \quad (26)$$

Здесь

$$\mathbf{D}_k^1 = \text{diag}\{x_j^k - \underline{x}_j\}, \mathbf{D}_k^2 = \text{diag}\{\bar{x}_j - x_j^k\}, \mathbf{D}_k^3 = \text{diag}\{y_i^k - \underline{y}_i\}, \mathbf{D}_k^4 = \text{diag}\{\bar{y}_i - y_i^k\}.$$

Пара значений  $\lambda_x = 0$ ,  $\lambda_y = 0$  соответствует варианту аффинно-масштабирующего метода. При  $\lambda_x = 1$ ,  $\lambda_y = 1$  целевая функция (25) является квадратичной аппроксимацией логарифмической барьерной штрафной функции, что вносит в алгоритм идеологию алгоритмов центрального пути. При этом, в отличие от них, здесь не требуется особого начального приближения. В целом, чем больше величины  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ , тем ярче выражено центрирующее направление.

Поскольку  $\Delta \mathbf{x}^k$  и  $\Delta \mathbf{y}^k$  представляют собой линейные относительно  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  вектор-функции, то можно поставить задачу выбора  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ , доставляющих максимально возможный (из условий невыхода переменных за границы допустимых интервалов) шаг корректировки  $\gamma^k$ . Как и ранее, шаг  $\gamma^k = 1$  соответствует нахождению допустимого решения системы (22). Вектор  $\mathbf{u}^k$  множителей Лагранжа ограничений (26) также может использоваться для идентификации несовместности на основе теоремы 5 при любых значениях  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$ .

Как показало экспериментальное исследование, комбинированный алгоритм успешно решает линейризованные задачи (задачи из того же набора были решены в среднем за 5.7 итерации). Кроме того, как правило, результатом работы комбинированного алгоритма является точка, находящаяся дальше от границ допустимого интервала, что является полезным свойством при решении исходной нелинейной задачи.

## Основные результаты работы

1. Разработан и теоретически обоснован новый класс полиномиальных алгоритмов решения задач линейного программирования - алгоритмы оптимизации в конусе скошенного пути, - являющийся обобщением и развитием алгоритмов оптимизации в конусе пути аналитических центров. Ключевой особенностью данного класса алгоритмов является то, что вычислительный процесс в них может начинаться с любых относительно внутренних точек множеств допустимых решений.

2. Предложенные алгоритмы реализованы в виде вычислительных программ. Проведено экспериментальное исследование, в результате которого установлено, что разработанные варианты алгоритмов, обладая полиномиальными оценками максимального объема вычислений, необходимых для получения решения пары взаимно-двойственных задач линейного программирования, близки по скорости к лучшим используемым на практике алгоритмам.

3. Показано, что на практике алгоритмы работают существенно лучше, чем это гарантируется имеющейся оценкой, что показывает значительное (до

десятков раз) превосходство наиболее эффективных из них над исходным алгоритмом, действующим строго в соответствии с гарантированной оценкой.

4. Продемонстрировано, что, хотя наилучшие оценки достигаются при значении квадрата радиуса конуса скошенного пути  $\theta=0.5$ , на практике наиболее эффективны алгоритмы со значением  $\theta$ , близким к 0.9. Также перспективным оказывается использование более высоких степеней  $p$  в процессе решения вспомогательной задачи определения величины  $\lambda^k$ . Данные два вывода объединяет идея целесообразности расширения конуса скошенного пути, реализуемая двумя различными способами.

5. Разработана специальная вычислительная процедура для итеративного уменьшения коэффициента скошенности. На основе экспериментов показана ее высокая эффективность.

6. Осуществлены программная разработка и сравнительные экспериментальные исследования нескольких вариантов аффинно-масштабирующих алгоритмов (в том числе двух прямых, двух двойственных, а также впервые реализованного самосопряженного алгоритма). Проведенные эксперименты позволили выработать ряд рекомендаций по использованию этих вариантов алгоритмов.

7. Для решения систем линейных и (на базе итеративной линеаризации) нелинейных уравнений и неравенств с двухсторонними ограничениями на переменные разработаны и реализованы в виде вычислительных программ специальные модификации алгоритмов внутренних точек, эффективно учитывающие специфику задачи.

8. Показано, что предложенные алгоритмы позволяют быстро (обычно на первой итерации) идентифицировать случай несовместности линеаризованной системы уравнений и неравенств; в некоторых случаях существенно ускоряют получение решения линеаризованной системы в случае совместности ограничений; вырабатывают в качестве решения точку, более удаленную от границ допустимой области, что способствует уменьшению числа итераций линеаризации при решении исходной нелинейной задачи.

9. Предложенные алгоритмы апробируются на практической задаче определения допустимых режимов ЭЭС и внедряются в разрабатываемый в ИСЭМ СО РАН программно-вычислительный комплекс “СДО” управления режимами ЭЭС.

#### **Основные публикации по теме диссертации**

1. Филатов А.Ю. “Сравнительный анализ алгоритмов оптимизации в окрестности центрального пути” // Материалы XXVII конференции научной молодежи Сиб. энергет. ин-та СО РАН, Иркутск, 1997, с. 214-224.

2. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Исследование алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути”: препринт СЭИ СО РАН, Иркутск, 1997, 50 с.

3. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Исследование систем неравенств алгоритмами внутренних точек на задачах поиска допустимых

режимов электроэнергетических систем”: препринт СЭИ СО РАН, Иркутск, 1997, 30 с.

4. Филатов А.Ю. “Решение задачи поиска допустимого режима ЭЭС алгоритмами внутренних точек” // Материалы XXVIII конференции научной молодежи ИСЭМ СО РАН, Иркутск, 1998, с.309-326.

5. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Новые варианты алгоритмов оптимизации в конусе центрального пути” // Труды XI международной Байкальской школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, 1998, том 1, с.22-25.

6. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Решение задачи определения допустимых режимов ЭЭС алгоритмами внутренних точек” // Труды XI международной Байкальской школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, 1998, том 3, с.57-60.

7. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Новые алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути” // “Дискретный анализ и исследование операций”, серия 2, том 6, №1, 1999, с.33-42.

8. Филатов А.Ю. “Решение задачи линейного программирования прямо-двойственным алгоритмом центрального пути” // Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, выпуск 29, Иркутск, 1999, с.241-248.

9. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Определение допустимых режимов электроэнергетических систем алгоритмами внутренних точек” // “Сибирский журнал индустриальной математики”, том 3, №1, 2000, с.57-65.

10. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Алгоритмы центрального пути для решения систем линейных уравнений и неравенств” // Сборник докладов Международной конференции “Распределенные системы: оптимизация и приложения” (DSO’2000), Екатеринбург, 2000, с.135-138.

11. Филатов А.Ю. “Алгоритмы оптимизации в конусе центрального пути для решения систем линейных уравнений и неравенств” // Труды молодых ученых ИСЭМ СО РАН, выпуск 30, Иркутск, 2000, с.315-322.

12. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Исследование итеративной процедуры определения допустимых режимов ЭЭС” // “Известия Академии Наук. Энергетика”, №6, 2000, с.64-73.

13. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Новый алгоритм скошенного пути для решения задачи линейного программирования” // Труды XII Байкальской международной конференции “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, 2001, том 1, с.16-22.

14. Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. “Решение систем уравнений и неравенств алгоритмами внутренних точек” // Труды XII Байкальской международной конференции “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, 2001, том 1, с.23-32.