Топология: на стыке математических дисциплин.

Глеб Гусев.

$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13 \longrightarrow$$
$$1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 13.$$

Любую перестановку можно получить последовательностью транспозиций соседних элементов.

Определение. Четность перестановки есть четность количества транспозиций в такой последовательности.

Понимание. Нечетную перестановку нельзя получить четным количеством транспозиций.

Аксиомы топологического пространства.

Определение. Топологическое пространство это пара (T, Ω), где $\Omega \subset 2^T$ удовлетворяет аксиомам:

1. $T, \emptyset \in \Omega$.
2. $A, B \in \Omega \Rightarrow A \cap B \in \Omega$.
3. $\Psi \subset \Omega \Rightarrow \bigcup_{U \in \Psi} U \in \Omega$.

Если $U \in \Omega$, то U называется *открытым в* T.

Определение. Отображение $f\colon T_1 \to T_2$ называется *непрерывным*, если

$\forall$ открытого $U \subset T_2$ имеем: $f^{-1}(U)$ открыто в T_1.

Определение. Топологические пространства T_1, T_2 называются изоморфными (*гомеоморфными*), если существует 1:1 $f\colon T_1 \to T_2: \;\; f, f^{-1}$ непрерывны.

Примеры топологических пространств.

1. $\mathbb{R}$. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}$ это $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, где $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
2. $\mathbb{R}^n$. Окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$ это
$$B_e^n(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}, \varepsilon \in \mathbb{R}_+.$$
3. $A \subset T$, (T, Ω) топ. пространство. Окрестность точки $x \in A$ это $U \cap A$, где $U \in \Omega$. Пример: $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$
4. $(T, 2^T)$. Окрестность точки x это $\{x\}$.

Множество V объявляется открытым, если
$$\forall x \in V \quad \exists \text{ ее окрестность } U(x) : U(x) \subset V.$$

Связность.

Определение. Топологическое пространство T называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения $T = T_1 \cup T_2$, где T_1, T_2 непусты, открыты и $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

Например, $\mathbb{R}^n, [x, y] \subset \mathbb{R}$ связны.

Утверждение. Пусть $f\colon T_1 \to T_2$ непрерывно, T_1 связно. Тогда $f(T_1)$ тоже связно.

Доказательство.

Допустим обратное: $F(T_1) = U \cup V$. Тогда:

$$T_1 = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$

$\square$

Теорема 1 *Пусть T_1 связно, T_2 дискретно, $f\colon T_1 \to T_2$ непрерывно. Тогда f постоянно.*

Теоремы: о промежуточном значении и Брауэра о неподвижной точке.

Теорема 2 *Пусть* T *связно,* $f : T \to \mathbb{R}$ *непрерывно и* $a, b \in f(T)$. *Тогда* $\forall c \in [a, b]$ *имеем* $c \in f(T)$.

Доказательство. Допустим обратное: $c \notin f(T)$. Тогда $f(T) = (f(T) \cap (-\infty, c)) \cup (f(T) \cap (c, +\infty))$ $\square$

Обозначим $B^n := B_1^n(0)$.

Теорема 3 *Пусть* $f : B^n \to B^n$ *непрерывно. Тогда* $\exists x \in B^n : f(x) = x$.

Аддитивная эйлерова характеристика.

Функтор $\chi\colon \{\text{хорошие топ. пространства}\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий аксиомам:

1. T_1 и T_2 изоморфны $\Rightarrow \chi(T_1) = \chi(T_2)$.
2. $T = T_1 \sqcup T_2 \Rightarrow \chi(T) = \chi(T_1) + \chi(T_2)$.
3. $\chi(\mathrm{pt}) = 1$.

Пусть $T = \sqcup_{i=1}^{c_0} B_i^0 \bigsqcup \sqcup_{i=1}^{c_1} B_i^1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup \sqcup_{i=1}^{c_n} B_i^n$. Тогда

$$\chi(T) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i c_i.$$

Теорема 4 *Последняя формула дает корректно определенный функтор на категории топ. пространств, представимых в указанном виде.*

Ясно, что этот функтор удовлетворяет 3-м аксиомам.

Теоремы, следующие из существования χ.

X – замкнутая двумерная поверхность.
$v\colon X \to T(X)$ – непрерывное векторное поле, количество его нулей конечно.

Теорема 5 *Сумма индексов в.п. v по всем точкам $x \in X : v(x) = 0$, равно $\chi(X)$.*

Следствие 1 *Любое непрерывное векторное поле на любой замкнутой поверхности кроме тора имеет хотя бы один ноль.*

Теорема 6 *Граф K_5 не укладывается на плоскости и на сфере, но может быть уложен на торе и на других замкнутых 2-мерных поверхностях.*

Теорема Бернштейна, Кушниренко, Хованского.

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — многочлен от n комплексных переменных. $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq 0, P(\mathbf{x}) = 0\}$, $\Delta(P)$ — многогранник Ньютона многочлена P.

Теорема 7 *Если P невырожден, имеем:*

$$\chi(V) = (-1)^{n-1} n! \operatorname{Vol}_n(\Delta(P)).$$