Оптимальные методы в экстремальных задачах

Задание № 2: Минимизация унимодальных функций

Дано:

функция $f(x)$, отрезок $[a, b]$, точность ε.

Требуется:

1) построить график функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$;

2) с помощью метода половинного деления найти приближённое значение $x^{(1)}$ точки минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью ε;

3) вычислить величину $f(x^{(1)})$;

4) с помощью метода золотого сечения найти приближённое значение $x^{(2)}$ точки минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью ε;

5) вычислить величину $f(x^{(2)})$;

6) провести сравнение результатов.

Требования к программе.

1) Вычисление значения функции $f(x)$ оформить в виде подпрограммы.

2) При реализации методов выяснить количество итераций, требуемых для достижения заданной точности – величину k.

3) При реализации методов выяснить количество обращений к функции $f(x)$ – величину m.

4) При реализации метода золотого сечения **необходимо обязательно учесть**, что на каждой итерации (при $k \geqslant 1$) требуется вычислять только $f(y_k)$ (значение $f(x_k)$ необходимо взять с предыдущей итерации).

5) Реализацию итерационных методов оформить в виде подпрограмм:

- входные параметры: границы отрезка (a, b), точность (ε);
- выходные параметры: приближённое значение точки минимума $(\widetilde{x})$, количество итераций (k), количество обращений к функции (m).

Описания методов

1) *Метод половинного деления*

$$
\begin{aligned}
&\text{начальное приближение: } a_0 = a,\ b_0 = b,\\
&\text{параметр метода: } \delta = \frac{\varepsilon}{10}\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
x_k = \dfrac{a_k + b_k - \delta}{2}\,,\ y_k = \dfrac{a_k + b_k + \delta}{2}\,,\quad f(x_k)\,,\quad f(y_k)\,,\\[2mm]
\text{если } f(x_k) < f(y_k)\,,\ \text{то}\ \ a_{k+1} = a_k\,,\ b_{k+1} = y_k\,,\ \text{иначе}\ \ a_{k+1} = x_k\,,\ b_{k+1} = b_k\,,\\[2mm]
k = 0, 1, \ldots\,;
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{условие остановки: } b_k - a_k \leqslant \varepsilon\,,\\
&\text{приближённое значение точки минимума: } \widetilde{x} = \frac{a_k + b_k}{2}\,.
\end{aligned}
$$

2) *Метод золотого сечения*

$$
\begin{aligned}
&\text{начальное приближение: } a_0 = a,\ b_0 = b,\\
&\text{вспомогательная точка: } x_0 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a),\\
&\text{значение функции: } f(x_0);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
y_k = a_k + b_k - x_k\,,\quad f(y_k)\,,\quad \boxed{x_k < y_k\,!}\\[2mm]
\ \text{если } f(x_k) < f(y_k)\,,\quad \text{то}\ \ a_{k+1} = a_k\,,\ b_{k+1} = y_k\,,\ x_{k+1} = x_k\,,\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \text{иначе}\ \ a_{k+1} = x_k\,,\ b_{k+1} = b_k\,,\ x_{k+1} = y_k\,,\\[2mm]
k = 0, 1, \ldots\,;
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{условие остановки: } b_k - a_k \leqslant \varepsilon\,,\\
&\text{приближённое значение точки минимума: } \widetilde{x} = x_k\,.
\end{aligned}
$$

Примечание 1.

```
clear all     % первая строка в m-файле

for счётчик=начало : конец
    команда1;
    команда2;
    ...
end

plot (точки X, точки Y)
grid on

if условие
    команда1;
    команда2;
    ...
else
    команда3;
    команда4;
    ...
end

while условие
    команда1;
    команда2;
    ...
end

function результат=имя (параметр1, параметр2, ...)
    команда1;
    команда2;
    ...
    результат=...;

function [результат1, результат2, ...]=имя (параметр1, параметр2, ...)
    команда1;
    команда2;
    ...
    результат1=...;
    результат2=...;
    ...
```

Примечание 2.

Пример программирования итерационного метода

$x_0 \in R$ – начальное приближение (выбрать самостоятельно);

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2}, \\ k = 0, 1, \ldots ; \end{cases}$$

условие остановки: $|x_k| \leqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; \widetilde{x} = x_k$.

```
clear all                % первая строка в m-файле
e=0.001                  % точность
x0=5                     % начальное приближение
k=0;                     % счётчик итераций
x=x0;
while  abs(x)>e          % цикл: пока НЕ выполнено условие остановки
      x=x/2;             % пересчёт приближения
      k=k+1;             % увеличение счётчика
end
x                        % решение
k                        % количество итераций
```

Реализация итерационного метода в виде подпрограммы

% Файл *method.m*:

```
function [x, k]=method(x0, e)
k=0;
x=x0;
while  abs(x)>e
      x=x/2;
      k=k+1;
end
```

% *Главная программа*:

```
clear all
e=0.001
x0=5
[x, k]=method(x0, e)        % вызов подпрограммы
```

Варианты задания

1.

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x\,, \quad a = -3\,, \quad b = 0\,, \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

2.

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}\,, \quad a = 0\,, \quad b = 7\,, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

3.

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}\,, \quad a = -1\,, \quad b = 5\,, \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

4.

$$f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}\,, \quad a = 0\,, \quad b = 5\,, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

5.

$$f(x) = -\frac{x^2+5x}{2x^3+3}\,, \quad a = 0\,, \quad b = 4\,, \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

6.

$$f(x) = -x - 2\sqrt{-x}\,, \quad a = -3\,, \quad b = 0\,, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

7.

$$f(x) = x\sqrt{5-x^2}\,, \quad a = -2\,, \quad b = -1\,, \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

8.

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{x+4}\,, \quad a = -1\,, \quad b = 1\,, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$