Лабораторные занятия по численным методам

Задание № 3:
Метод простой итерации

Дано: матрица A, вектор b, точность ε.

Требуется:

1) с помощью правила Якоби привести линейную систему $Ax = b$ к виду, удобному для итераций $x = Bx + c$;

2) используя метод простой итерации, найти приближённое решение $\widetilde{x}$ системы с точностью ε;

3) вычислить оценку погрешности $\|\widetilde{x} - x^*\|_\infty$;

4) определить вектор невязок $r = A\widetilde{x} - b$;

5) подсчитать норму $\|r\|_\infty$;

6) провести анализ полученных результатов.

Примечание 1.

Выбор начального приближения x^0 провести самостоятельно. При этом для сравнительного анализа результатов выполнить метод необходимо с не менее, чем тремя вариантами вектора x^0:

1) выбор произвольный, исходя из условия $\|x^0\|_1 \approx 10$
(например, $x^0 = (2, -6, 3, -1) \;\Rightarrow\; \|x^0\|_1 = 12 \approx 10$);

2) $\|x^0\|_1 \approx 100$;

3) $\|x^0\|_1 \approx 1000$.

Примечание 2.

clear all *первая строка в m-файле*

a_{ij} $\to$ A(i,j)

```
for счётчик=начало : конец
    команда1;
    команда2;
    ...
end
```

```
while условие
    команда1;
    команда2;
    ...
end
```

```
if условие
   команда1;
   команда2;
   ...
else
   команда3;
   команда4;
   ...
end
```

norm (вектор, тип) *тип*: 1, 2, inf

norm (матрица, тип) *тип*: 1, 2, inf

Примечание 3.

Правило Якоби:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad x = Bx + c,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Метод простой итерации:

$x^0 \in R^n$– начальное приближение (выбрать самостоятельно);

$$\begin{cases} x^{k+1} = Bx^k + c\,, \\ k = 0, 1, \dots\,; \end{cases}$$

условие остановки: $\dfrac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^k - x^{k-1}\|_\infty \leqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; \widetilde{x} = x^k.$

Оценка погрешности приближённого решения ($\widetilde{x} = x^k$):

$$\|\widetilde{x} - x^*\|_\infty \leqslant \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|\widetilde{x} - x^{k-1}\|_\infty.$$

Пример программирования итерационного метода:

$x_0 \in R$ – начальное приближение (выбрать самостоятельно);

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{x_k}{2}\,, \\ k = 0, 1, \dots\,; \end{cases}$$

условие остановки: $|x_k| \leqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; \widetilde{x} = x_k.$

```
clear all            % первая строка в m-файле
e=0.001;             % точность
x=5;                 % начальное приближение
k=0;                 % счётчик итераций
while abs(x)>e       % цикл: пока НЕ выполнено условие остановки
      x=x/2;         % пересчёт приближения
      k=k+1;         % увеличение счётчика
end
x                    % решение
k                    % количество итераций
```

Варианты задания

1.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0001$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 11 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0002$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 11 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0003$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 11 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0004$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0005$$

Варианты задания

6.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0006$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0007$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 13 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 11 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0008$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0009$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 14 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.001$$

Варианты задания

11.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 10 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0001$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0002$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 11 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0003$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0004$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 12 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0005$$

Варианты задания

16.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 13 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 11 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0008$$

17.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 14 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.001$$

18.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0005$$

19.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0002$$

20.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon = 0.0006$$