Лабораторные занятия по численным методам

Задание № 2:
Метод квадратного корня

Дано: матрица A, вектор b.

Требуется:

1) найти верхнюю треугольную матрицу U, проводящую разложение матрицы A по методу квадратного корня;

2) с помощью матрицы U найти решение x^* линейной системы $Ax = b$;

3) определить вектор невязок $r = Ax^* - b$;

4) вычислить нормы $\|r\|_1$, $\|r\|_2$, $\|r\|_\infty$.

Примечание 1.

clear all *первая строка в m-файле*

for счётчик=начало : конец *или* =конец : −1 : начало
    команда1;
    команда2;
    ...
end

transpose *или* '

$\sqrt{\ldots}$ $\to$ **sqrt** (...)

a_{ij} $\to$ A(i,j)

norm (вектор, тип) *тип*: 1, 2, inf

Примечание 2.

Тестовый пример:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 23 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метод квадратного корня:

1) *первая строка матрицы* U:

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}\,, \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}}\,,\ j = \overline{2, n}\,;$$

2) i-*я строка матрицы* U $(i = \overline{2, n})$:

$$u_{ij} = 0,\ j = \overline{1, i-1},$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2}\,,$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj} \right),\ j = \overline{i+1, n}\,;$$

3) *поиск решения* x^* системы $Ax = b$:

$$\begin{aligned} &U^T y = b \quad (\textit{нижняя треугольная система}), \\ &Ux = y \quad (\textit{верхняя треугольная система}). \end{aligned}$$

Решение треугольных систем вида $Qz = p$ **:**

1) *с верхней треугольной матрицей* Q:

$$z_n = \frac{p_n}{q_{nn}}\,, \quad z_i = \frac{1}{q_{ii}} \Big(p_i - \sum_{j=i+1}^{n} q_{ij} z_j \Big),\ i = \overline{n-1, 1};$$

2) *с нижней треугольной матрицей* Q:

$$z_1 = \frac{p_1}{q_{11}}\,, \quad z_i = \frac{1}{q_{ii}} \Big(p_i - \sum_{j=1}^{i-1} q_{ij} z_j \Big),\ i = \overline{2, n}.$$

Варианты задания

1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 11 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix}$$

5.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 13 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & 11 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 14 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Варианты задания

6.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 14 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$$

8.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 10 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

9.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 & 3 \\ -1 & 7 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 10 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

10.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & 11 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 9 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Варианты задания

11.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

12.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 12 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$

13.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix}$$

14.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 11 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

15.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 11 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Варианты задания

16.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 12 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 & -2 \\ -1 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

17.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 2 \\ -71 \end{pmatrix}$$

18.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 10 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

19.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 12 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 10 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

20.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 12 & -2 & 5 \\ 2 & -2 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$$