Иркутский государственный университет
ИМЭИ
Кафедра алгебры и геометрии

Элементы линейной алгебры
Методическое пособие

г. Иркутск

Печатается по решению научно-методического совета
Иркутского государственного университета

Содержит необходимый теоретический материал, подробное решение задач. Варианты семестровых заданий.

Предназначена для студентов математического факультета. Могут быть использованы для самостоятельного изучения студентами младших курсов факультетов с небольшой программой по математике

Илл.26

Составлен: к.ф.-м.н., доцент Кузьмина Е.Ю.

Рецензент к.ф.-м.н. Осипенко Л.А.

Содержание

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определителем второго порядка называется выражение вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются элементами определителя, они расположены в его двух строках и двух столбцах (рядах).

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) = 17 .$$

Отметим, что если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функция (но может быть и числом). Так,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x ;$$

$$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1;$$

$$\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ 1/2 & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0 .$$

Определителем третьего порядка называется выражение вида

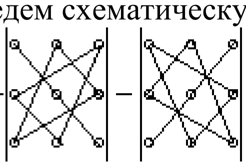
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Числа a_{ij}, i, j =1,2,3, называются элементами определителя; они расположены в трех его строках и трех столбцах (рядах).

Расписывая в Δ определители второго порядка и группируя члены с одинаковыми знаками, получим следующее правило вычисления определителя (правило треугольников или правило Саррюса):

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}) \qquad (1)$$

Приведем схематическую запись этого правила:

$\Delta = +$ 

Пример 1. вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Решение: По формуле (1) имеем:

$$\Delta = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - (-3) \cdot 6 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = 71 .$$

Под минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка понимается определитель второго порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания i строки и j столбца. Так, для элемента $a_{22} = 6$ определителя (2) имеем:

$$\mathrm{M}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 .$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} (минором со знаком) элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком плюс, если i+j – четное, и со знаком минус, если i+j – нечетное, т.е.:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij} .$$

Так, для элемента $a_{23} = 5$ определителя (2) получим

$$\mathrm{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

Соответствующие знаки, приписываемые при этом минорам элементов определителя, можно задать таблицей:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Определителем n-го порядка называется выражение, записываемое в виде квадратной таблицы размером $n \times n$ вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij}, i,j=$\overline{1,n}$, которые называются элементами определителя (всего их n^2). При этом индекс i указывает номер строки, а индекс j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Главной диагональю определителя называется совокупность его элементов $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathrm{M}_{ij}$$

Для произвольного n

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\mathrm{A}_{1k} ,$$

где $\mathrm{A}_{1k} = (-1)^{1+k}\mathrm{M}_{1k}$, а миноры M_{1k}, являющиеся определителями (n-1)-го порядка, получаются из Δ вычеркиванием первой строки и k-го столбца.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 36 - 3 = 28$$

Основные свойства определителей

1. Сумма произведений элементов любого ряда определителя на их алгебраические дополнения не зависит от номера ряда и равна этому определителю:

$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \mathrm{A}_{1k} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathrm{A}_{kj}$, i,j=$\overline{1,n}$.

Эти равенства можно было бы (как и формулу (1)) принять за определение. Первое из них называется разложением Δ по элементам i-й строки , а второе – по элементам j-го столбца.

2. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots\ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots\ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{n3} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. Если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие 1. Определитель, у которого два параллельных ряда одинаковы, равен нулю.

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя, т.е.:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \ldots\ldots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие 1. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Следствие 2. Если элементы какого-либо ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \ldots\ldots & ka_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \ldots\ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots\ldots & b_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots\ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Следствие 1. (элементарные преобразования). Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить (или отнять) числа, пропорциональные соответствующим элементам его параллельного ряда с одним и тем же коэффициентом пропорциональности.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}\pm ka_{21} & a_{12}\pm ka_{22} & a_{13}\pm ka_{23} & \ldots\ldots & a_{1n}\pm ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \pm k \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Элементарные преобразования дают удобный способ вычисления определителей.

Пример 2. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычитая из второй строки определителя удвоенную первую строку, а из его третьей строки утроенную первую строку, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

Основные методы вычисления определителей

1. Метод эффективного понижения порядка

Используя основные свойства определителей, вычисление определителя Δ n-го порядка всегда можно свести к вычислении. Одного определителя (n-1)-го порядка.

При этом элементами преобразованиями получаем в каком-либо ряду Δ все элементы, кроме одного, равными нулю.
Покажем это на примере.
Пример 3. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -24 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$$

Решение. По свойству 4 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а звтем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, согласно следствию 1 свойства 5, имеем:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

По свойству 1 определителей полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычитая теперь из второй и третьей строк первую строку, имеем:

$$\Delta = 10 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910$$

2. Приведение определителя к треугольному виду

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется определителем треугольного вида. В этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ к треугольному виду всегда возможно.

Пример 4. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

Решение. Выполним следующие действия. Пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3, - со вторым, на 2 – с третьим, на 8 – с чеивертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 = -5544$$

Пример 5. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \ldots\ldots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \ldots\ldots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \ldots\ldots & 5 \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ 5 & 5 & 5 & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычитая первую строку из всех остальных, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \ldots\ldots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots\ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} 5^n$$

Самостоятельная работа

1. не раскрывая определитель, доказать справедливость равенства:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$;

в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

2. Решить уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Решить неравенство:

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

4. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$, содержащие x^4 и x^3.

5. Вычислить определители методом приведения к треугольному виду:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}; \ \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

6. Вычислить определители, предварительно упростив их:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

§ 2. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, некоторого множества, называется матрицей и записывается в виде

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } \text{A} = (a_{ij})$$

При этом элемент a_{ij} матрицы стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Матрицы обычно обозначается прописными буквами латинского алфавита: A, B, C,…

Если у матрицы m строк и n столбцов, то, по определению, она имеет размерность $m \times n$. В случае необходимости ее обозначают следующим образом: $\text{A}_{m\times n}$. Матрица называется числовой, если ее элементы a_{ij} - числа; функциональной, если a_{ij} - функции; векторной, если a_{ij} - векторы и т.д.

Матрицы (a_{ij}) и (b_{ij}) называются равными, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Матрицы, у которых m=n, называются квадратными.

Если i=1, то получаем матрицу – строку, если j=1, имеем матрицу – столбец. Их также называют вектор – строкой и вектор – столбцом соответственно.

Основные действия над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц

Действие определенно только для матриц одинаковой размерностию

Суммой (разностью) матриц $A = (a_{ij})$ и B=(b_{ij}), обозначаемой A+B (A-B), называется матрица $C = (c_{ij})$, для элементов которой справедливо равенство:

$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Тогда

$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ, обозначаемым λA, называется матрица B=(b_{ij}) той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda\ a_{ij}$.

Например, пусть λ=3, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда

$\lambda A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Умножение матриц

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times p}$ называется матрица $C_{m\times p} = A_{m\times n} B_{n\times p}$ элементы которой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, где a_{ik}, b_{kj} - элементы матриц A и B, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$.

Отметим, что произведение матриц существует только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. При этом из существования матрицы AB не следует существование матрицы BA. Если они существуют обе, то, вообще говоря, AB$\neq$BA. Если AB=BA, то матрицы A и B называются перестановочными (или коммутирующими).

Пример 6. Пусть даны матрицы A и B:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Вычислить AB, BA

Решение.

$$\text{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot1+(-1)\cdot3 & 1\cdot2+0\cdot0+(-1)\cdot1\\ 2\cdot1+3\cdot1+(-2)\cdot3 & 2\cdot2+3\cdot0+(-2)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix};$$

$$\text{BA}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot0+2\cdot3 & (-1)\cdot1+2\cdot(-2)\\ 1\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot0+0\cdot3 & (-1)\cdot1+0\cdot(-2)\\ 3\cdot1+1\cdot2 & 3\cdot0+1\cdot3 & (-1)\cdot3+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & -5\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

Пример 7. Для матрицы $\text{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ найти все перестановочные с ней квадратные матрицы.

Решение. Пусть $\text{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Найдем AB, BA

$$\text{AB}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a+3c & -b+3d\end{pmatrix};$$

$$\text{BA}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-b & a+3b\\ 2c-d & c+3d\end{pmatrix}$$

Требуя выполнения равенства AB=BA, получаем, что $c=-b$, $d=b+a$.

Следовательно, $\text{B}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & b+a\end{pmatrix}$, где a и b – любые числа.

Матрица $\text{E}_{n\times n}$ называется единичной, если для любой матрицы $\text{A}_{n\times n}$ имеет место равенство AE=EA=A.

Данному определению удовлетворяет единственная матрица

$$\text{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0\\ . & . & . & \ldots\ldots & .\\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1\end{pmatrix}$$

Матрица $\text{B}_{m\times n}=(b_{kp})$ называется транспонированной по отношению к матрице $\text{A}_{n\times m}=(a_{pk}),\ p=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}$, если $b_{kp}=a_{pk}$.

При этом матрицу B принято обозначать символом A^t, а операцию перехода от матрицы A к матрице A^t называть транспонированием.

Определитель n-го порядка, составленный из элементов матрицы $\text{A}_{n\times n}$, будем в дальнейшем обозначать через ΔA.

Для любых матриц A, B, C размерности $m\times n$ и любых чисел α и β из R верны следующие соотношения:

1. A+B=B+A;
2. $\alpha(\beta\text{A})=(\alpha\beta)\text{A}$;
3. (A+B)+C=A+(B+C);
4. $\alpha(\text{A}+\text{B})=\alpha\text{A}+\alpha\text{B}$;
5. $(\alpha+\beta)\text{A}=\alpha\text{A}+\beta\text{A}$;
6. $(\text{A}+\text{B})^t=\text{A}^t+\text{B}^t$;
7. $(\alpha\text{A})^t=\alpha\text{A}^t$;

8. $\Delta(\alpha A) = \alpha^n \Delta A$, если m=n;
9. $A(BC) = (AB)C$;
10. $A(B + C) = AB + AC$;
$(A + B)C = AC + BC$
11. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$;
12. $(AB)^t = B^t A^t$;
13. $\Delta AB = \Delta A \cdot \Delta B$, если m=n.

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A той же размерности, если $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.
Квадратная матрица A называется невырожденной, если $\Delta A \neq 0$.
Для того, чтобы для матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Свойства обратных матриц.
1. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
2. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
Известно, что для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta A}, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n2} \\ . & . & \ldots\ldots & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица A^* называется присоединенной, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} транспонированной матрицы A^t.

Пример 8. Дана матрица A. Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Имеем $\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$.
Далее находим алгебраические дополнения
$A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = -1$
Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix};$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/5 + 2/5 & -2/5 + 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 2/5 + 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 + 2/5 & -6/5 + 6/5 \\ -1/5 + 1/5 & 2/5 + 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, если ранг матрицы r , то среди миноров этой матрицы есть, по крайней мере, один минор r-го порядка, отличный от нуля, в то время как все ее миноры порядка $(r+1)$ и выше (если они существуют) равны нулю. Ранг матрицы A будем обозначать через Rang A.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Ранг матрицы A можно вычислять методом окаймляющих миноров. Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется окаймляющим минор M_k. Если у матрицы A существует минор $\mathrm{M}_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры M_{k+1}=0, то Rang A=k/

Пример 9. Найти ранг матрицы:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение. Имеем $\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Для M_2 окаймляющим минором будут только два минора

$$\mathrm{M}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix}, \ \mathrm{M}_3^* = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому RangA=2, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный.

Ранг матрицы не изменится, если:

1). Поменять местами любые два параллельных ряда;

2). Умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель, отличный от нуля;

3). Прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель;

4). Транспонировать исходную матрицу.

Преобразования 1)-4) называются элементарными. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается A ~ B.

Ранг матрицы A можно вычислить также методом единиц и нулей. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы.

Пример 10. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычитая из третьей строки удвоенную первую, сокращая второй столбец на 2 и вычитая из первого столбца утроенный второй, из третьего – второй и из четвертого – удвоенный второй, последовательно получаем

$$A\sim\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ -6 & 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ -6 & 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ -6 & 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

Прибавляя далее к третьей строке утроенную вторую, сокращая первый столбец на 2, прибавляя его к третьему и вычитая из четвертого, поменяв, наконец, метами первые два столбца, будем иметь

$$A\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Получаем, таким образом, что RangA=2.

Обозначим через $e_1, e_2, ..., e_m$ строки какой- то матрицы А. Будем говорить, что строки $e_1, e_2, ..., e_m$ матрицы А линейно независимы, если можно подобрать такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, - не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_m e_m = 0 \qquad (3)$$

Если таких чисел α_i не существует, т.е. равенство (3) имеет место лишь при всех α_i=0, то говорят, что строки $e_1, e_2, ..., e_m$ - линейно независимы.

Если ранг матрицы равен r, то в этой матрице можно найти r линейно независимых строк (или столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы). Отметим, что максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк.

Самостоятельная работа.

1. Даны матрицы А и В. Найти А+В, 2А, А-3В, если :

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\\ -7 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 0 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix};$

б) $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 4 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -8 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 11 & 7\end{pmatrix}$

2. Даны матрицы А и В. Найти АВ и ВА, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix};$

б) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 7\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице А, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Найти ранг матрицы А с помощью элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Метод Крамера

Рассмотрим линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (4)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то система (4) называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Под решением системы (4) понимается всякая пара чисел (x,y), обращающая эту систему в тождество.

Введем определитель системы (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $\Delta \neq 0$, то получим единственное решение системы (4):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{(формулы Крамера)} \qquad (5)$$

Если $\Delta = 0$, то возможны два случая:

а) $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$

Система (4) не имеет решений (т.е. несовместна).

б) $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$

Система (4) имеет бесконечно много решений (т.е. система неопределена).

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} 7x - 6y = 5 \\ 8x - 7y = -10 \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -49 + 48 = -1 \neq 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -10 & -7 \end{vmatrix} = -35 - 60 = -95;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -70 - 40 = -110.$$

На основании формул Крамера (5) получаем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-95}{-1} = 95, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-110}{-1} = 110.$$

Дадим геометрическую интерпретацию решений системы (4). Уравнения системы (4) задают на плоскости прямые. Поэтому вопрос совместности уравнений системы сводятся к вопросу взаимного расположения этих прямых. Действительно, в случае, когда $\Delta \neq 0$ и система (4) имеет единственное решение (5), прямые пересекаются в единственной точке (x,y) (рис.1,а). Если $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta = 0$, то прямые параллельны (рис. 1,б). И, наконец, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то прямые совпадают (рис. 1,в).

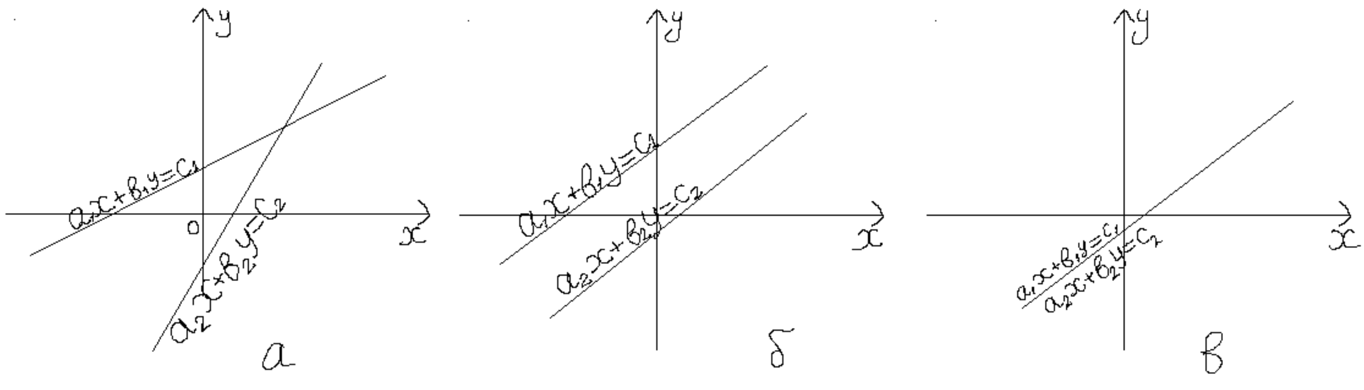


Рис. 1.

Рассмотрим теперь систему двух однородных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Эта система всегда совместна, так как имеет нулевое решение x=0, y=0, z=0.

Введем в рассмотрение матрицу коэффициентов системы (6)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Определители второго порядка $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, которые получаются из матрицы (7) путем вычеркивания соответствующего столбца, называются ее минорами. Таким образом, имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta$$

Тогда, пользуясь методом Крамера относительно переменных $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, получаем, что

$$\frac{x}{z} = \frac{\Delta_1}{\Delta_3},\ \frac{y}{z} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \text{ если } \Delta_3 \neq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{-\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = t,\ t \in R \quad (7)$$

Из (7) получим, что

$$x = \Delta_1 t,\ \ y = -\Delta_2 t,\ z = \Delta_3 t \quad (8)$$

Тем самым найдены и все ненулевые решения системы (6)

Отметим, что формулы (8) будут справедливы, если любой (хотя бы один) из миноров $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ отличен от нуля.

Пример 12. Решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу коэффициентов

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix},$$

найдем ее миноры

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -18,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

На основании формул (8) полная система решений имеет вид:

$$x = -3t, y = 18t, z = 13t, t \in R$$

При t=2 получаем одно из ненулевых решений системы $x = -6, y = 36, z = 26$

Рассмотрим теперь стандартную неоднородную линейную систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2\,, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (9)$$

свободные члены которых находятся в правых частях. Под решением системы понимается всякая тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая этой системе.

Введем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а также дополнительные определители

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Метод Крамера в случае $\Delta \neq 0$ позволяет найти единственное решение системы (9):

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (10)$$

Отметим, что в случае $\Delta = 0$ система (9) или несовместна, или имеет бесконечно много решений.

Пример 13. Решить методом Крамера систему:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Для дополнительных определителей находим следующие значения:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

Используя (10), получаем решение системы

$$x = -\frac{5}{18}, y = \frac{1}{18}, z = \frac{7}{18}.$$

Рассмотрим однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Система (11), очевидно, допускает нулевое решение x=0, y=0, z=0 и, следовательно, всегда совместна.
Однородная система (11) имеет ненулевые решения только в случае, когда ее определитель равен нулю, т.е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Предположим, что минор M_{33} - базисный, т.е.:

$$\mathrm{M}_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(этого всегда можно добиться с помощью перестановки уравнений и изменения нумерации неизвестных).
Рассмотрим подсистему, состоящую из двух первых уравнений системы (11):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}.$$

В силу формул (8) решения этой системы имеют вид:

$$x = \mathrm{A}_{31}t,\ y = \mathrm{A}_{32}t,\ z = \mathrm{A}_{33}t, t \in R \qquad (12)$$

где $\mathrm{A}_{31}, \mathrm{A}_{32}, \mathrm{A}_{33}$ - алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя Δ.

Формулы (12) при произвольном t дают все решения системы (11)

Метод Гаусса.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}x_n + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (13)$$

Решением системы (13) называется совокупность n чисел $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, ..., x_n = \alpha_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в тождества.

Рассмотрим две матрицы: матрицу A, составленную из коэффициентов при неизвестных системы (13), и матрицу

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & ..... & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

полученную из A добавлением столбца свободных членов и называемую расширенной матрицей. Очевидно, что $\mathrm{RangA} \le \mathrm{RangB}$.

Для совместности системы (13) необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы B был равен рангу матрицы коэффициентов A (теорема Кронекера – Капелли).

Для решения систем уравнений вида (13) практически удобнее пользоваться методом Гаусса, предварительно проверив их на совместность при помощи теоремы Кронекера – Капелли.

Выпишем расширенную матрицу этой системы:

$$\mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ..... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ..... & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & ..... & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ..... & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

где чертой отделен столбец свободных членов. Над строками матрицы B производим элементарные преобразования, с помощью которых получается расширенная матрица новой системы, равносильной исходной, из которой решение системы видно непосредственно.

Познакомимся с методом Гаусса на конкретных примерах.

Пример 14. Решить систему неоднородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

данной системы и ранг ее расширенной матрицы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

Для этого достаточно преобразовать матрицу B. Умножив ее первую строку на -2 и сложим со второй, затем, умножив первую строку на -3 и сложим с третьей, поменяв местами второй и третий столбцы. Получим,

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array}\right).$$

Следовательно, RangA=RangB=3 (т.е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = -2$

Пример 15. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу A и ее расширенную матрицу B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -13 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \ B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array}\right).$$

Пользуясь элементарными преобразованиями, вычислим ранги матриц A и B. Для этого преобразуем матрицу B. Из ее второй, третьей и четвертой строк вычтем первую, умноженную соответственно на 1, 2, 3. Затем вторую строку прибавляем к третьей и четвертой:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

При этом RangA=RangB=2. По теореме Кронекера – Капелли система имеет бесконечное множество решений. Зададим для x_3 и x_4 произвольные значения $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$. Тогда формулы

$x_1 = -17\alpha + 29\beta + 5,$
$x_2 = 10\alpha - 17\beta - 2$
$x_3 = \alpha$
$x_4 = \beta$
при произвольных α и β дают все решения данной системы.

Пример 16. Решить систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_3 - 10x_4 = 8 \end{cases}$$

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -10 \end{pmatrix},$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, RangA=3, RangB=4 и система несовместна.

Матричный метод

Запишем систему (13) в матричной форме: AX=C,
где A – матрица системы, X – столбец из неизвестных, C – столбец из свободных членов.
Предположим, что определитель матрицы A системы (13) отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение и, с другой стороны, для A существует обратная матрица A^{-1}. Будем под X в (14) подразумевать столбец из решения системы (13).
Умножив обе части равенства (14) слева на A^{-1}, получим
A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=EX=X= A^{-1}C.
Таким образом, для столбца решений системы (13) имеем: X= A^{-1}C

Пример 17. Решить систему:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Решение. Определитель данной системы отличен от нуля. Для матрицы A системы находим обратную и применяем формулу (15):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 3$

Контрольная работа

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ:

а) разложив его по элементам i-ой строки;
б) разложив его по элементам j-го столбца;
в) получив предварительно нули в i-ой строке.

1.1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}, i = 4, j = 1$

1.2 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}, i = 3, j = 3$

1.3 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}, i = 4, j = 1$

1.4 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}, i = 1, j = 3$

1.5 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}, i = 2, j = 4$

1.6 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}, i = 1, j = 2$

1.7 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}, i = 2, j = 3$

1.8 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}, i = 3, j = 1$

1.9 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}, i = 4, j = 3$

1.10 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, i = 4, j = 2$

2. Даны две матрицы A и B. Найти:

а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) $A A^{-1}$; д) $A^{-1} A$.

2.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.4 $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

2.6 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2.7 $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

2.8 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$

2.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

2.10 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:
   а) по формулам Крамера;
   б) матричным методом;
   в) методом Гаусса.

3.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

3.6 $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

3.8 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

3.9 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений:

4.1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.3 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

4.4 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

4.5 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

4.6 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.7 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4.8 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

4.9 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

4.10 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$