Отборочный тур ИМЭИ ежегодной Всероссийской студенческой олимпиады по математике

1. Найти ограниченное и непрерывное вместе с производной на всей числовой прямой решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = e^{-|x|}$.

2. а) Существует ли на вещественной оси непрерывная функция, график которой пересекается с любой прямой на плоскости по крайней мере один раз?

б) Существует ли на неотрицательной полуоси непрерывная функция, пересекающаяся с любой горизонтальной прямой четное число раз?

3. Функция $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ дифференцируема и имеет непрерывную производную. Вычислить $\displaystyle\int \frac{f(x) + f'(x)}{f(x) + e^{-x}} dx$.

4. Вершина C треугольника ABC неподвижна, а сторона AB постоянной длины $2a$ скользит вдоль прямой l. По какой линии движется центр окружности, описанной около треугольника?

5. При приеме в старшую группу детского сада проводится следующий экзамен. Перед ребенком случайной стороной раскладываются в ряд 35 карточек, на одной стороне карточек написана буква «М», а на другой «А». Ребенок должен найти 4 подряд идущие карточки, на которых написано слово «МАМА». Сколькими в среднем способами ребенок может выполнить задание?

6. Введем следующее обозначение для n-ой итерации вещественной функции f: $f(\underbrace{f(\ldots(f(x)\ldots))}_{n\ \text{раз}}) = f^{(n)}(x)$. Найти предел $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin^{(n)} x - \sin^{(n)} x}{x^3}$.

7. В городе *Wheel* метро состоит из кольцевой линии (n станций) и центральной станции, соединенной с каждой станцией кольцевой линии (см. рис. 1, 2). Руководство города решило устроить ремонт максимального числа перегонов, но так, чтобы с любой станции оставалась возможность добраться с помощью метро до любой другой. Сколькими способами руководство может осуществить свой замысел, если а) $n = 3$; б) $n = 4$?

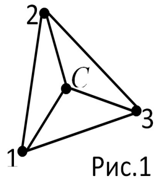

Рис.1

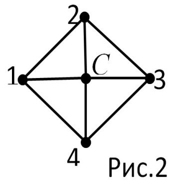

Рис.2

8. Пусть числа a, b и c не все совпадают друг с другом. Описать все наборы параметров $\{a,\, b,\, c\}$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - yz = a, \\ y^2 - zx = b; \\ z^2 - xy = c; \end{cases}$$

имеет решения в действительных числах x, y, z.

9. Относительно матрицы $A = (a_{ij})$ известно, что сумма ее элементов в каждом наборе, соответствующем произведению элементов, входящих в определитель (сумма элементов, выбранных по одному из каждой строки и каждого столбца, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, σ — перестановка из S_n) одна и та же (не зависит от $\sigma \in S_n$). Доказать, что $A = B + C$, где в матрице B столбцы состоят из одинаковых элементов, а в матрице C строки состоят из одинаковых элементов.

10. Даны окружности ω_1 и ω_2, расположенные вне друг друга. Найти геометрическое место центров окружностей, каждая из которых касается обеих заданных окружностей.